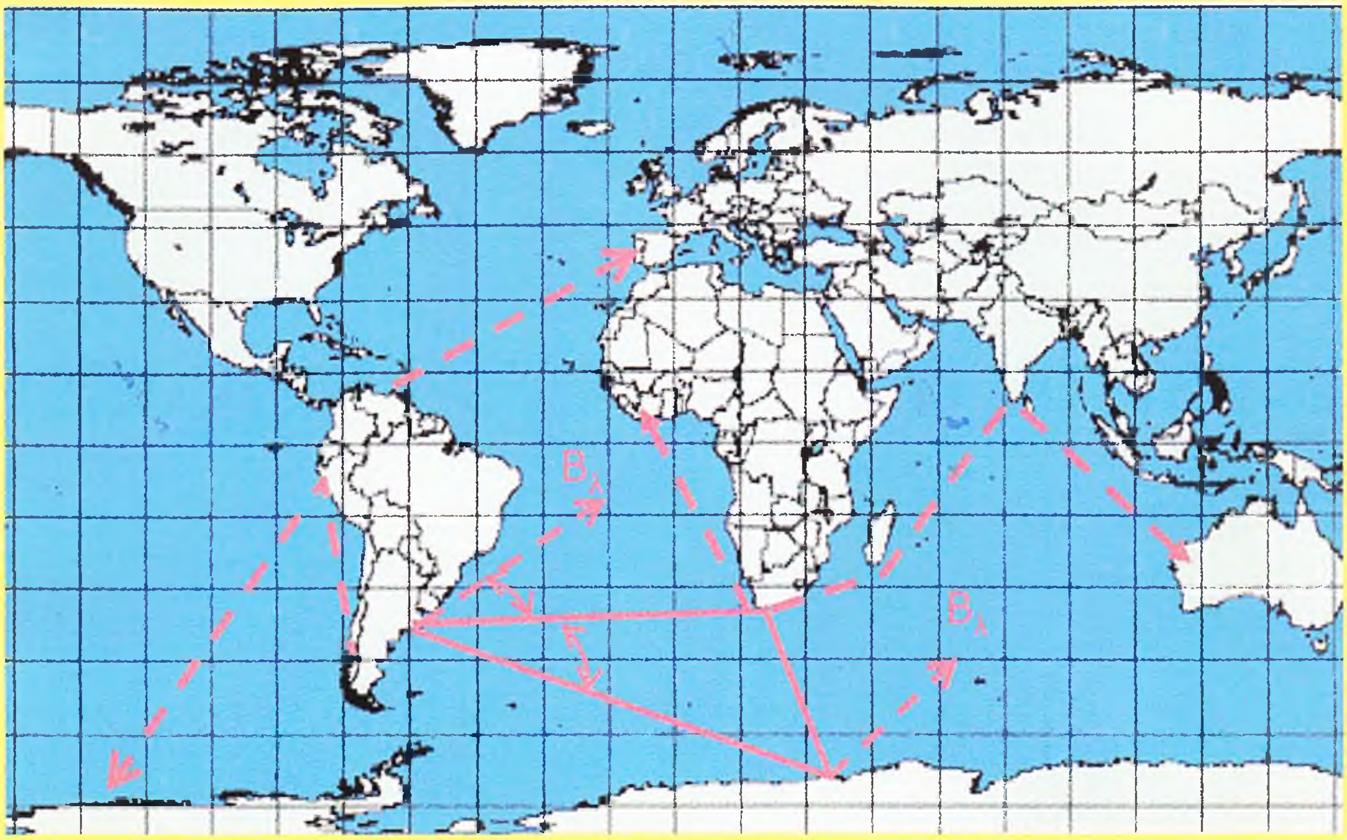
Αθανάσιος Ι. Ματούλας
Καθηγητής Α.Ε.Ν ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΩΝ ΑΕΝ

Μαθηματικά Α' Εξαμήνου

ΤΕΥΧΟΣ Α'

- ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
- ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους Σπουδαστές του Α' εξαμήνου της Σχολής Πλοιάρχων της Ακαδημίας Εμπορικού Ναυτικού.

Επειδή απευθύνεται κατά κύριο λόγο σε μελλοντικούς Πλοιάρχους, οι οποίοι αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά κυρίως από πρακτική άποψη, δεν δόθηκε έμφαση στη θεωρία ούτε σε θεωρητικές αποδείξεις, αλλά παρουσιάστηκαν με τον αυστηρότερο δυνατό τρόπο τα απολύτως απαραίτητα που πρέπει να γνωρίζει ένας Πλοίαρχος κατά την διάρκεια των σπουδών του και στην μετέπειτα καριέρα.

Από την άλλη μεριά δόθηκε ιδιαίτερο βάρος στις εφαρμογές, οι οποίες παρουσιάζονται με την μορφή λυμένων και άλυτων ασκήσεων. Για τους σπουδαστές κυρίως ο μεγάλος αριθμός ασκήσεων είναι πολύ χρήσιμος επειδή λειτουργούν στην κατεύθυνση της εμβάθυνσης της θεωρίας, ξεκαθαρίζοντας συχνά τα όσα διατυπώνονται εκεί.

Τέλος, επειδή πάντοτε η πρώτη προσπάθεια έχει περιθώρια βελτίωσης, ευελπιστώ στη δημιουργική κριτική των σπουδαστών και συναδέλφων, ώστε το βιβλίο αυτό να βελτιωθεί όπου χρειάζεται.

Νέα Μηχανιώνα 2005

Ματούλας Αθανάσιος
Καθηγητής
ΑΕΝ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Επανάληψη των κυριοτέρων ιδιοτήτων των λογαρίθμων.

ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού Α, ως προς βάση α λέγεται η δύναμη (ο εκθέτης) στην οποία πρέπει να υψωθεί η βάση α για να δώσει τον αριθμό Α.

δηλ. $y=\log_a A \Leftrightarrow a^y=A$, $0<a \neq 1$, $A>0$.

π. χ. Έστω Α=100 και α=10. Ζητείται ο λογάριθμος που 100:

$\log_{10}100=y \Leftrightarrow 10^y=100 \Rightarrow 10^y=10^2 \Rightarrow y=2$

- Σαν βάση των λογαρίθμων μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό π.χ.

$\log_5 125=y \Leftrightarrow 5^y=125 \Rightarrow 5^y=5^3 \Rightarrow y=3$

- Συνήθως όμως σαν βάση των λογαρίθμων χρησιμοποιείται είτε ο ασύμμετρος αριθμός e=2,71828...., είτε ο αριθμός 10.

α) Στην πρώτη περίπτωση οι λογάριθμοι λέγονται " ΝΕΠΕΡΕΙΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ" και χρησιμοποιούμε το σύμβολο "ln" δηλαδή :

$y=\ln A \Leftrightarrow e^y=A$ (η βάση e εννοείται).

β) Στην δεύτερη περίπτωση οι λογάριθμοι λέγονται "ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ" ή "ΚΟΙΝΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ" και χρησιμοποιούμε το σύμβολο "log" χωρίς να σημειώνουμε την βάση που εννοείται. δηλαδή:

$y=\log A \Leftrightarrow 10^y=A$

- Όλοι οι θετικοί αριθμοί έχουν λογάριθμο. Αυτός είναι πραγματικός αριθμός θετικός ή αρνητικός ή μηδέν.
- Οι μη θετικοί αριθμοί (αρνητικοί και μηδέν) δεν έχουν λογάριθμο.
- Στο δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα οι αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας έχουν θετικό λογάριθμο. Οι αριθμοί μικρότεροι της

μονάδας (και φυσικά οι μεγαλύτεροι του μηδενός) έχουν αρνητικό λογάριθμο. π. χ. $\log\frac{1}{100}=y \Leftrightarrow 10^y=10^{-2} \Rightarrow y=-2$.

- Ο λογάριθμος οποιουδήποτε αριθμού έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Εμείς κατά προσέγγιση θα παίρνουμε μόνο τα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\log_3 81=y \Leftrightarrow 3^y=81 \Rightarrow 3^y=3^4 \Rightarrow y=4$

2. $\log_5 25=y \Leftrightarrow 5^y=25 \Rightarrow 5^y=5^2 \Rightarrow y=2$

3. $\log_a 1 = y \Leftrightarrow a^y=1 \Rightarrow a^y=a^0 \Rightarrow y=0$

4. $\log_a a = y \Leftrightarrow a^y=a^1 \Rightarrow y=1$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

1) $\log_\alpha(x_1 . x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

ή $\log_\alpha(x_1 . x_2 .... x_\nu) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2 + ... \log_\alpha x_\nu$.

2) $\log_\alpha \frac{x_1}{x_2} = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$.

3) $\log_\alpha x^\kappa = \kappa \log_\alpha x$

4) $\log_\alpha \sqrt[\kappa]{x} = \frac{1}{\kappa} \log_\alpha x$ $\quad (\sqrt[\kappa]{x} = x^{\frac{1}{\kappa}})$

5) $\log_\alpha 1 = 0$

6) $\log_\alpha \alpha = 1$

7) $\log_{10} x = \log x$

8) $\log_\alpha x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$ (αλλαγή βάσης λογαρίθμου).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να υπολογιστεί το άθροισμα:* $A=3\log_3 2+2\log_3 6-\log_3 32$.

Λύση

$A = 3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 32 = \log_3 2^3 + \log_3 6^2 - \log_3 32$

$= \log_3(2^3.6^2)-\log_3 32 = \log_3\dfrac{2^3.6^2}{32} = \log_3\dfrac{8.36}{32} = \log_3 3^2 = 2.$

2. *Να υπολογιστεί η παράσταση:* $A=3\log 2+\log 5-\log 4$.

Λύση

$A = 3\log 2 + \log 5 - \log 4 = \log 2^3 + \log 5 - \log 4$

$= \log(2^3.5) - \log 2^2 = \log\dfrac{2^3.5}{2^2} = \log 10 = 1.$

3. *Να αποδειχτεί η ισότητα :* $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{5}\log 32=1+\log 2$.

Λύση

$\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{5}\log 32 = \log(5^2)^{\frac{1}{2}} + \log(2^3)^{\frac{1}{3}} + \log(2^5)^{\frac{1}{5}} =$

$= \log 5 + \log 2 + \log 2 = \log(5.2) + \log 2 = \log 10 + \log 2 = 1 + \log 2.$

4. *Να αποδειχτεί η ισότητα:* $\log_\alpha 5+2\log_\alpha 3=\log_\alpha 45$

Λύση

$\log_\alpha 5 + 2\log_\alpha 3 = \log_\alpha 5 + \log_\alpha 3^2 = \log(5.9) = \log_\alpha 45$

5. *Να αποδειχτεί η ισότητα:* $3\log_2 4-2\log_3 9=2$.

Λύση

$3\log_2 4 - 2\log_3 9 = \log_2(2^2)^3 - \log_3(3^2)^2 = \log_2 2^6 - \log_3 3^4 = 6 - 4 = 2$

6. *Να αποδειχτεί ότι αληθεύουν οι παρακάτω ισότητες:*
α) $3\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 16=5\log_3 2$, *β)* $2+3\log_5 2-2\log_5 10=\log_5 2$

<u>Λύση:</u>

α) $3\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 16 = 5\log_3 2$, $\log_3 2^3 + \log_3 16^{\frac{1}{2}} = \log_3(2^3 \cdot 16^{\frac{1}{2}}) =$

$= \log_3(8.\sqrt{16}) = \log_3(8.\sqrt{4^2}) = \log_3 32 = \log_3 2^5 = 5\log_3 2.$

β) $2 + 3\log_5 2 - 2\log_5 10 = \log_5 2$, $\log_5 5^2 + \log_5 2^3 - \log_5 10^2 =$

$= \log_5(5^2 . 2^3) - \log_5 10^2 = \log_5 \frac{25.8}{100} = \log_5 \frac{200}{100} = \log_5 2$

7. *Να αποδειχτεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:*
α) $\log_a 3+ \log_a 4+ \log_a 5=\log_a 60$,
β) $\frac{1}{2}\log_a 25+\frac{1}{3}\log_a 8+\frac{1}{5}\log_a 32 = \log_a 5+ 2\log_a 2$,
γ) $\log 4+\log 12-\log 18-\log 6=\log\frac{4}{9}$

<u>Λύση:</u>

α) $\log_a 3 + \log_a 4 + \log_a 5 = \log_a 60$, $\log_a 3 + \log_a 4 + \log_a 5 =$

$= \log_a(3.4.5) = \log_a 60$

β) $\frac{1}{2}\log_a 25 + \frac{1}{3}\log_a 8 + \frac{1}{5}\log_a 32 =$

$= \log_a 5 + 2\log_a 2$, $\log_a 25^{\frac{1}{2}} + \log_a 8^{\frac{1}{3}} + \log_a 32^{\frac{1}{5}} =$

$= \log_a\sqrt{5^2} + \log_a\sqrt[3]{2^3} + \log_a \sqrt[5]{2^5} = \log_a 5 + \log_a(2.2) = \log_a 5 + \log_a 2^2 =$

$= \log_a 5 + 2\log_a 2$

γ) $\log 4 + \log 12 - \log 18 - \log 6 = \log\frac{4}{9}$, $\log 4 + \log 12 - \log 18 - \log 6 =$

$= \log 4 + \log 12 - (\log 18 + \log 6) = \log(4.12) - \log(18.6) = \log\frac{4.12}{18.6} = \log\frac{4}{9}$

8. Να βρεθεί η βάση α των λογαρίθμων για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες:

α) $\log_{\alpha}16=-2$, *β)* $\log_{\alpha}15=-1$, *γ)* $\log_{\frac{1}{\alpha}}12=\frac{1}{2}$, *δ)* $\log_{\alpha}9=\frac{2}{5}$,

ε) $\log_{\alpha}\frac{1}{8}=1,5$

<u>Λύση:</u>

α) $\log_{\alpha}16=-2 \Leftrightarrow \alpha^{-2}=16 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}=16 \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{16}$

$\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \Rightarrow \alpha=\pm\frac{1}{4}, \alpha=\frac{1}{4}$ απορρίπτεται (α>0) η $\alpha=-\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1}{4}$ δεκτή, $\alpha=-\frac{1}{4}$ απορρίπτεται αφού πρέπει $(0<\alpha\neq 1)$

(Πρέπει $0<\alpha\neq 1$, $\log_{\alpha}y=x \Leftrightarrow \alpha^x=y$ ορισμός).

β) $\log_{\alpha}15=-1 \Leftrightarrow \alpha^{-1}=15 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=15 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{15}$

γ) $\log_{\frac{1}{\alpha}}12=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}=12 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=12^2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{144}$

δ) $\log_{\alpha}9=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{2}{5}}=9 \Leftrightarrow \alpha=9^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \alpha=(3^2)^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \alpha=3^5=243$

ε) $\log_{\alpha}\frac{1}{8}=1,5 \Leftrightarrow \alpha^{1,5}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^3} \Leftrightarrow$

$\alpha=\left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{(2^2)^3}} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}$

9. *Να βρεθεί η βάση α στις παρακάτω ισότητες:*

α) $\log_{\alpha^{-2}} 81 = -2$, *β)* $\log_\alpha 343=3$, *γ)* $\log_\alpha 64=-2$, *δ)* $\log_\alpha \frac{1}{81} = -4$

<u>Λύση:</u>

α) $\log_{\alpha^{-2}} 81 = -2 \Leftrightarrow (\alpha^{-2})^{-2} = 81 \Leftrightarrow \alpha^4 = 81 \Leftrightarrow \alpha^4 = 3^4 \Leftrightarrow \alpha = 3$

β) $\log_\alpha 343 = 3 \Leftrightarrow \alpha^3 = 343 \Leftrightarrow \alpha^3 = 7^3 \Leftrightarrow \alpha=7.$

γ) $\log_\alpha 64=-2 \Leftrightarrow$

$\alpha^{-2} = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} = 64 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{(\frac{1}{8})^2} \Leftrightarrow$

$\alpha = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{8}, \alpha = -\frac{1}{8}$ απορρίπτεται ($\alpha>0$) αφού πρέπει ($0 < \alpha \neq 1$)

δ) $\log_\alpha \frac{1}{81} = -4 \Leftrightarrow \alpha^{-4} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^4} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \alpha^4 = 3^4 \Leftrightarrow \alpha = 3$

" ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ, ΠΗΛΙΚΩΝ, ΔΥΝΑΜΕΩΝ και ΡΙΖΩΝ ".

1. *Να αποδειχτεί η ισότητα :* $\dfrac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log 15-\log 2}=\dfrac{3}{2}$

Λύση:

$$\frac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log 15-\log 2}=$$

$$\frac{\log\sqrt{5^3}+\log\sqrt{3^3}-\log\sqrt{2^3}}{\log 15-\log 2}=\frac{\log 5^{\frac{3}{2}}+\log 3^{\frac{3}{2}}-\log 2^{\frac{3}{2}}}{\log 15-\log 2}=$$

$$\frac{\frac{3}{2}\log 5+\frac{3}{2}\log 3-\frac{3}{2}\log 2}{\log 15-\log 2}=\frac{\frac{3}{2}(\log 5+\log 3-\log 2)}{\log 15-\log 2}=\frac{\frac{3}{2}\log\frac{5.3}{2}}{\log\frac{15}{2}}=\frac{\frac{3}{2}\log\frac{15}{2}}{\log\frac{15}{2}}=\frac{3}{2}.$$

2. *Να υπολογιστεί :* $\log\dfrac{x^3.\sqrt{y}}{4\sqrt{x}.y^3}$

Λύση:

$$\log\frac{x^3.\sqrt{y}}{4\sqrt{x}.y^3}=\log(x^3\sqrt{y})-\log(4\sqrt{x}.y^3)=\log x^3+\log\sqrt{y}-$$

$$-(\log 4+\log\sqrt{x}+\log y^3)=3\log x+\log y^{\frac{1}{2}}-\log 2^2-\log x^{\frac{1}{2}}-3\log y=$$

$$=3\log x+\frac{1}{2}\log y-2\log 2-\frac{1}{2}\log x-3\log y=\frac{5}{2}\log x-\frac{5}{2}\log y-2\log 2$$

3. *Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης*

$$A=\frac{\log_5 125-2\log_{0,1}0,0001}{\log_8\sqrt{8}+3\log_{\sqrt{2}}8}$$

<u>Λύση:</u>

$$A=\frac{\log_5 125-2\log_{0,1}0,0001}{\log_8\sqrt{8}+3\log_{\sqrt{2}}8}=$$

$$=\frac{\log_5 5^3-2\log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{10^4}}{\log_8 8^{\frac{1}{2}}+3\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^3}=\frac{3-2\log_{\frac{1}{10}}(\frac{1}{10})^4}{\frac{1}{2}+3\log_{2^{\frac{1}{2}}}(2^{\frac{1}{2}})^6}=\frac{3-2.4}{\frac{1}{2}+3.6}=-\frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{36}{2}}=-\frac{10}{37}$$

4. *Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:*

i) $A=\log\frac{8\alpha^3\beta^2\sqrt{\alpha\beta}}{3x^2.\sqrt[3]{\alpha^2}}$, *ii)* $A=\log\frac{5x^2\sqrt[4]{y^2z}}{7y^2\sqrt[3]{x^2yz^2}}$

<u>Λύση:</u>

i) $A=\log(8\alpha^3\beta^2\sqrt{\alpha\beta})-\log(3x^2\sqrt[3]{\alpha^2})=$

$=\log 8+\log\alpha^3+\log\beta^2+\log\sqrt{\alpha\beta}-(\log 3+\log x^2+\log\sqrt[3]{\alpha^2})=$

$=\log 2^3+3\log\alpha+2\log\beta+\log(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}-\log 3-2\log x-\log\alpha^{\frac{2}{3}}=$

$=3\log 2+3\log\alpha+2\log\beta+\frac{1}{2}\log(\alpha\beta)-\log 3-2\log x-\frac{2}{3}\log\alpha=$

$=3\log 2+\frac{7}{3}\log\alpha-\log 3-2\log x+\frac{1}{2}\log\alpha+\frac{1}{2}\log\beta+2\log\beta=$

$=3\log 2+\frac{17}{6}\log\alpha-\log 3-2\log x+\frac{5}{2}\log\beta$

ii) $A=\log\dfrac{5x^3\sqrt[4]{y^2z}}{7y^2\sqrt[3]{x^2yz^2}}$

$$A=\log(5x^3\sqrt[4]{y^2}z)-\log(7y^2\sqrt[3]{x^2yz^2})=$$

$$=\log5+\log x^3+\log\sqrt[4]{y^2z})-(\log7+\log y^2+\log\sqrt[3]{x^2yz^2})=$$

$$=\log5+\log x^3+\log(y^2z)^{\frac{1}{4}}-\log7-\log y^2-\log(x^2yz^2)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\log5+3\log x+\frac{1}{4}\log(y^2z)-\log7-2\log y-\frac{1}{3}\log(x^2yz^2)=$$

$$=\log5+3\log x+\frac{1}{4}(\log y^2+\log z)-\log7-2\log y-\frac{1}{3}(\log x^2+\log y+\log z^2)=$$

$$=\log5+3\log x+\frac{1}{4}2\log y+\frac{1}{4}\log z-\log7-2\log y-(\frac{1}{3}2\log x+\frac{1}{3}\log y+\frac{1}{3}2\log z)=$$

$$=\log5+3\log x+\frac{1}{2}\log y+\frac{1}{4}\log z-\log7-2\log y-\frac{2}{3}\log x-\frac{1}{3}\log y-\frac{2}{3}\log z=$$

$$=\frac{7}{3}\log x-\frac{11}{6}\log y-\frac{5}{12}\log z+\log5-\log7$$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

1. *Να αποδειχτεί η ισότητα:* $\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{25}=\log_4 5$

Λύση:

$$\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{25}=\frac{\log_4\frac{1}{25}}{\log_4\frac{1}{16}}=\frac{\log_4 5^{-2}}{\log_4 4^{-2}}=\frac{-2\log_4 5}{-2\log_4 4}=\frac{\log_4 5}{1}=\log_4 5$$

ΤΥΠΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ: $\log_a x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$ όπου $a,\beta,x>0$ & $a,\beta\neq 1$

2. *Να αποδειχτούν οι ισότητες : i)* $\log_2 625 = \dfrac{4}{\log_5 2}$

ii) $\log_8 125 = \dfrac{1}{\log_5 2}$ *iii)* $\log_{40} 25 = \dfrac{2}{3\log_5 2 + 1}$

iv) $\dfrac{\log_a x}{\log_{a\beta} x} = 1 + \log_a \beta$,

v) $(\log_a\beta + \log_\beta a + 2)(\log_a\beta - \log_{a\beta}\beta)\log_\beta a - 1 = \log_a\beta$

<u>Λύση:</u>

i) $\log_2 625 = \dfrac{4}{\log_5 2}$, $\log_2 625 = \dfrac{\log_5 625}{\log_5 2} = \dfrac{\log_5 5^4}{\log_5 2} = \dfrac{4\log_5 5}{\log_5 2} = \dfrac{4}{\log_5 2}$.

ii) $\log_8 125 = \dfrac{1}{\log_5 2}$, $\log_8 125 = \dfrac{\log_5 125}{\log_5 8} = \dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 2^3} = \dfrac{3\log_5 5}{3\log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2}$

iii) $\log_{40} 25 = \dfrac{2}{3\log_5 2 + 1}$

$\log_{40} 25 = \dfrac{\log_5 25}{\log_5 40} = \dfrac{\log_5 5^2}{\log_5 (2^3.5)} = \dfrac{2\log_5 5}{\log_5 2^3 + \log_5 5} = \dfrac{2}{3\log_5 2 + 1}$

iv) $\dfrac{\log_a x}{\log_{a\beta} x} = 1 + \log_a\beta$,

$$\frac{\log_a x}{\log_{a\beta} x} = \frac{\log_a x}{\dfrac{\log_a x}{\log_a(a\beta)}} = \frac{\cancel{\log_a} x . \log_a(a\beta)}{\cancel{\log_a} x} = \log_a(a\beta) = \log_a a + \log_a \beta = 1 + \log_a\beta.$$

v) $(\log_a\beta + \log_\beta a + 2)(\log_a\beta - \log_{a\beta}\beta)\log_\beta a - 1 = \log_a\beta$,

$(\log_a\beta + \log_\beta a + 2)(\log_a\beta - \log_{a\beta}\beta)\log_\beta a - 1 =$

$$(\log_a\beta + \frac{\log_a a}{\log_a \beta} + 2)(\log_a \beta - \frac{\log_a \beta}{\log_a (a\beta)}).\frac{\log_a a}{\log_a \beta} - 1 =$$

$$(\log_a\beta + \frac{1}{\log_a \beta} + 2)(\ \log_a\beta - \frac{\log_a \beta}{\log_a a + \log_a \beta}) \cdot \frac{1}{\log_a \beta} - 1 =$$

$$\frac{\log^2{}_a \beta + 2\log_a \beta + 1}{\log_a \beta}.\cancel{\log_a}\beta[1 - \frac{1}{1+\log_a \beta}].\frac{1}{\cancel{\log_a \beta}} - 1 =$$

$$= \frac{(\log_a \beta + 1)^2}{\log_a \beta} \cdot \frac{\cancel{1} + \log_a \beta - \cancel{1}}{1 + \log_a \beta} - 1 = \frac{(\log_a \beta + 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{\log_a \beta}} \cdot \frac{\cancel{\log_a \beta}}{1 + \cancel{\log_a} \beta} - 1 =$$

$$= \log_a \beta + 1 - 1 = \log_a \beta.$$

ΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο λέγονται λογαριθμικές.

ΜΕΘΟΔΟΣ Όπως οι εκθετικές που για να λυθούν πρέπει να φθάσουμε σε ισότητα δυνάμεων με ίσες βάσεις, έτσι και οι λογαριθμικές για να επιλυθούν πρέπει να φθάσουμε σε ισότητα λογαρίθμων με ίδιες βάσεις οπότε απολογαριθμίζουμε.

Για να φθάσουμε σε ισότητα λογαρίθμων χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθούν οι λογάριθμοι: α) log(5x+1)=log(x+8),

β) $\log_3(2x-4)-\log_3(4x+1)=\log_3 9$

Λύση:

α) log(5x+1)=log(x+8),

Πρέπει $\begin{cases} 5x+1>0 \\ x+8>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x>-1 \\ x>-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{1}{5} \\ x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{5}$

Έχουμε : $\log(5x+1)=\log(x+8) \Leftrightarrow 5x+1=x+8 \Leftrightarrow 4x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$

β) $\log_3(2x-4)-\log_3(4x+1)=\log_3 9$.

Πρέπει $\begin{cases} 2x-4>0 \\ 4x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ x>-\frac{1}{4} \end{cases} \iff x>2,$

Εχουμε : $\log_3 \frac{2x-4}{4x+1} = \log_3 9 \Leftrightarrow$

$\frac{2x-4}{4x+1} = 9 \iff 2x-4 = 9(4x+1) \iff 34x = -13 \iff x = -\frac{13}{34} < 2$

(αδύνατη).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. *Να λυθούν οι εξισώσεις .*

α) $\log_{\frac{3}{4}} x = \frac{1}{2}$, *β)* $\log(x-3)+\log(x-1)=\log 2+\log 24$,

γ) $2\log x-\log(x+1)=\log 4-\log 3$, *δ)* $\log(x-3)+\log x=\log(x-3)^2-1$,

ε) $\log_x(2x-1)=2$, *στ)* $\log_x 2-\log_x 3=2$, *z)* $x^{\log 3 x}=81$,

η) $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2.$, *θ)* $\log_2(x^2+5x+6)-\log_2(x+2)=2.$

Λύση:

α) $\log_{\frac{3}{4}} x = \frac{1}{2}$

Πρέπει να είναι $x>0$. Είναι $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

β) $\log(x-3)+\log(x-1)=\log 2+\log 24$.

[Πρέπει να είναι : $x-3>0$ και $x-1>0 \Leftrightarrow x>3$].(1)

Είναι : $\log[(x-3)(x-1)] =\log(2.24)$, $\Leftrightarrow (x-3)(x-1)=2.24 \Leftrightarrow x^2-4x+3=48 \Leftrightarrow$

$x^2-4x-45=0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες $x_1=-5$ και $x_2=9$.

Δεκτή είμαι μόνο η ρίζα $x_2=9$ ενώ η $x_1=-5$ απορρίπτεται λόγω του (1).

γ) $2\log x-\log(x+1)=\log 4-\log 3$

[Πρέπει να είναι : $x>0$ και $x+1>0 \Leftrightarrow x>0$] (1).

Η εξίσωση γίνεται : $\log x^2-\log(x+1)=\log 4-\log 3 \Leftrightarrow$

$\log\frac{x^2}{x+1} = \log\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 = 4(x+1) \Leftrightarrow$

$3x^2-4x-4=0$.Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες $x_1=2$, $x_2=-\frac{2}{3}$, από τις οποίες μόνο η $x_1=2$ είναι δεκτή .

√ δ) log (x-3)+logx=log(x-3)^2-1

$$\text{Πρέπει}: \begin{cases} x-3>0 \\ x>0 \\ (x-3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3 (1)$$

Η εξίσωση log(x-3)+logx=log(x-3)^2-1 γίνεται: log(x-3)+logx=2log(x-3)-1⇔

logx=log(x-3)-log10⇔ logx=log$\frac{x-3}{10}$⇔ x=$\frac{x-3}{10}$⇔ 10x=x-3⇔

⇔ 9x=-3⇔x=-$\frac{1}{3}$(αδύνατη).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η επίλυση κάθε λογαριθμικής εξίσωσης αρχίζει με τους περιορισμούς που πρέπει να ισχύουν για το x ώστε να έχουν νόημα οι λογάριθμοι.

√ ε) $\log_x(2x-1)=2$

[Πρέπει να είναι 2x-1>0 ⇔ x>$\frac{1}{2}$ και $1\neq x>0 \Rightarrow 1\neq x>\frac{1}{2}$]

Είναι : $\log_x(2x-1)=\log_x x^2$ ⇔ $2x-1=x^2$ ⇔ $x^2-2x+1=0$

⇔ x=1, που απορρίπτεται όμως λόγω περιορισμών.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

√ στ) $\log_x 2-\log_x 3=2$ [Πρέπει x>0 και $x\neq 1$].

Είναι : $\log_x 2-\log_x 3=2$⇔ $\log_x\frac{2}{3}=2 \Leftrightarrow \log_x\frac{2}{3}=\log_x x^2$

⇔ $\frac{2}{3}=x^2$ ⇔ $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow (x>0), x=\sqrt{\frac{2}{3}}$

√ z) $x^{\log_3 x}=81$ [πρέπει x>0]

Είναι $x^{\log_3 x}=81$. Την λογαριθμίζω : $\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$.

⇔ $\log_3 x.\log_3 x=\log_3 3^4 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2=4 \Leftrightarrow$

$$\log_3 x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = \log_3 3^2 \\ \log_3 x = \log_3 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ x = 3^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

η) $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1} = 2$.

[Πρέπει: $x-9>0 \Leftrightarrow x>9$ και $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow x > 9$]

Τότε : $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1} = 2 \Leftrightarrow \log(x-9) + \log(\sqrt{2x-1})^2 = 2$

$\log(x-9)+\log(2x-1)=2 \Leftrightarrow \log[(x-9)(2x-1)]=\log 10^2$

$\Leftrightarrow (x-9)(2x-1)=10^2 \Leftrightarrow 2x^2-19x-91=0$ ($\Delta=1089$)

$\Leftrightarrow X_1=13$ και $x_2=-\frac{7}{2}$ (απορρίπτεται).

θ) $\log_2(x^2+5x+6)-\log_2(x+2)=2$.

[Πρέπει : $\begin{vmatrix} x^2+5x+6>0 \\ x+2>0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ ή } x>-2 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>-2$]

$\log_2(x^2+5x+6)-\log_2(x+2)=2 \Leftrightarrow \log_2\frac{x^2+5x+6}{x+2} = \log_2 2^2 \Leftrightarrow$

$\log_2\frac{(x+3)(x+2)}{x+2} = \log_2 2^2 \Leftrightarrow x+3=4 \Leftrightarrow x=1$.δεκτή.

i) Να λυθεί η εξίσωση : $\log_2[2+\log_3(3+x)]=0$

<u>Λύση:</u> $2+\log_3(3+x)>0 \Rightarrow x>-\frac{26}{9}$

[Πρέπει : $3+x>0 \Leftrightarrow x>-3$]

$\log_2[2+\log_3(3+x)]=0 \Leftrightarrow \log_2[2+\log_3(3+x)]=\log_2 1 \Leftrightarrow$

$2+\log_3(3+x)]=1 \Leftrightarrow \log_3(3+x)]=-1 \Leftrightarrow \log_3(3+x)=\log_3 3^{-1} \Leftrightarrow$

$3+x=3^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-3 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{3}$. δεκτή

ια) Να λυθεί η εξίσωση : $5^{3x-1}=2^{x+3}$

<u>Λύση:</u>

Λογαριθμίζουμε την ισότητα : $5^{3x-1}=2^{x+3} \Leftrightarrow \log 5^{3x-1} = \log 2^{x+3}$

$\Leftrightarrow (3x-1)\log 5=(x+3)\log 2 \Leftrightarrow$

$3x\log 5-\log 5=x\log 2+3\log 2 \Leftrightarrow 3x\log 5-x\log 2=\log 5+3\log 2 \Leftrightarrow$

$x(3\log 5-\log 2)=\log 5+3\log 2 \Leftrightarrow x=\dfrac{\log 5+3\log 2}{3\log 5-\log 2}$

√ ***ιβ) Να λυθεί η εξίσωση : $2\log_4 x+2\log_x 4=5$.***

<u>Λύση:</u>

[Πρέπει : $x>0$ και $x\neq 1$].

$2\log_4 x+2\log_x 4=5 \Leftrightarrow$ (αλλάζω βάση από x σε 4).

$2\log_4 x+2\dfrac{\log_4 4}{\log_4 x}=5 \Leftrightarrow 2\log^2{}_4 x+2=5\log_4 x.$

Θέτω $\log_4 x=y \Rightarrow 2y^2-5y+2=0 \Leftrightarrow y_1=2,\ y_2=\dfrac{1}{2}$.

Άρα $\log_4 x=2 \Leftrightarrow \log_4 x=\log_4 4^2 \Leftrightarrow x=4^2 \Leftrightarrow x=16$.

ή $\log_4 x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4 x=\log_4 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{4} \Leftrightarrow x=2$ $(x>0)$.

2. *Να λυθούν οι εξισώσεις :α)* $\frac{2\log x-1}{\log x-1}-\frac{\log x^2-3}{\log x-2}+\frac{1}{6}=0$,

β) log[log(4x-3)]=0, γ) $\log(2^x+2.3^x)+\log 81=x\log 3+\log 178$

<u>Λύση:</u>

α) $\frac{2\log x-1}{\log x-1}-\frac{\log x^2-3}{\log x-2}+\frac{1}{6}=0$

Πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ x^2>0 \\ \log x-1\neq 0 \\ \log x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \\ \log x\neq 1 \\ \log x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log x\neq \log 10 \\ \log x\neq \log 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 10 \\ x\neq 100 \end{cases}$

Η λύση της εξίσωσης είναι : $\frac{2\log x-1}{\log x-1}-\frac{\log x^2-3}{\log x-2}+\frac{1}{6}=0 \Leftrightarrow$

6(2logx-1)(logx-2)-6(2logx-3)(logx-1) + (logx-1)(logx-2) = 0 ⇔

Θέτουμε όπου logx=ω και έχουμε :

6(2ω-1)(ω-2)-6(2ω-3)(ω-1)+(ω-1)(ω-2)=0⇔

$6(2\omega^2-4\omega-\omega+2)-6(2\omega^2-2\omega-3\omega+3)+\omega^2-2\omega-\omega+2=0 \Leftrightarrow$

$12\omega^2-24\omega-6\omega+12-12\omega^2+12\omega+18\omega-18+\omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow$

$\omega^2-30\omega+12+30\omega-18-3\omega+2=0 \Leftrightarrow \omega^2-3\omega-4=0 \Leftrightarrow$

⇔ Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\omega_1=-1$ και $\omega_2=4$.

'Αρα $\begin{cases} \log x=-1 \\ \log x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=\log 10^{-1} \\ \log x=\log 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ x=10.000 \end{cases}$

β) log[log(4x-3)]=0.

Πρέπει $\begin{cases} 4x-3>0 \\ \log(4x-3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>3 \\ 4x-3>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>3 \\ 4x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X>\frac{3}{4} \\ X>1 \end{cases} \Leftrightarrow X>1$

Η λύση της εξίσωσης είναι :

log[log(4x-3)]=0 ⇔ log[log(4x-3)]=log1 ⇔ log(4x-3)=1⇔ log(4x-3)=log10

⇔ 4x-3=10 ⇔ 4x=10+3 ⇔ 4x=13 ⇔ $x=\frac{13}{4}$.

γ) $\log(2^x+2.3^x)+\log 81=x\log 3+\log 178$

Πρέπει $2^x+2.3^x > 0$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε $x\in R$.

Η λύση της εξίσωσης είναι :

$\log(2^x+2.3^x)+\log 81=x\log 3+\log 178 \Leftrightarrow \log[(2^x+2.3^x).81]=\log 3^x+\log 178$

$\Leftrightarrow \log[(2^x+2.3^x).81] = \log(3^x \cdot 178) \Leftrightarrow 81.\ 2^x+81.2.3^x=178.\ 3^x$

$\Leftrightarrow 81.\ 2^x=16.\ 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}=\frac{16}{81} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^x=(\frac{2}{3})^4 \Leftrightarrow x=4.$

3. *Να λυθεί η εξίσωση : α)* $\log_2(2^{x+1}+4^x)=2+\log_2 20$,

β) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$, *γ)* $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

<u>Λύση:</u>

α) $\log_2(2^{x+1}+4^x)=2+\log_2 20$

Πρέπει $2^{x+1}+4^x>0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in R$.

Η λύση της εξίσωσης είναι :

$\log_2(2^{x+1}+4^x)=2+\log_2 20 \Leftrightarrow \log_2(2^{x+1}+4^x)=\log_2 2^2+\log_2 20 \Leftrightarrow$

$\log_2(2^{x+1}+4^x)=\log_2(4.20) \Leftrightarrow 2^{x+1}+4^x=80 \Leftrightarrow (2^x)^2+2.2^x-80=0.$

Θέτουμε $2^x=\omega$ και έχουμε : $\omega^2+2\omega-80=0 \Leftrightarrow$ με ρίζες $\omega_1=-10$, $\omega_2=8$

Άρα $2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3 \Leftrightarrow$ δεκτή και $2^x=-10$ (απορρίπτεται)

β) $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$. Πρέπει να είναι $x>0$.

Η λύση της εξίσωσης είναι :

$2^{\log x}+2^5\cdot 2^{-\log x}=12 \Leftrightarrow 2^{\log x}+\frac{2^5}{2^{\log x}}=12$. Θέτουμε $2^{\log x}=\omega$ και έχουμε

$\omega+\frac{32}{\omega}=12 \Leftrightarrow \omega^2+32=12\omega \Leftrightarrow \omega^2-12\omega+32=0$

με ρίζες $\omega_1=4$ και $\omega_2=8$

Άρα $\begin{cases} 2^{\log x} = 4 \\ 2^{\log x} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\log x} = 2^2 \\ 2^{\log x} = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2 \\ \log x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^2 = x \\ 10^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = 1000 \end{cases}$

γ) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

Πρέπει $\begin{cases} (7x-9)^2 > 0 \\ (3x-4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-9 \neq 0 \\ 3x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{9}{7} \\ x \neq \frac{4}{3} \end{cases}$

Η λύση της εξίσωσης είναι :

$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2 \Leftrightarrow \log[(7x-9)^2 \cdot (3x-4)^2]=\log10^2$

$\Leftrightarrow \log[(7x-9)(3x-4)]^2=\log10^2 \Leftrightarrow [(7x-9)(3x-4)]^2=10^2 \Leftrightarrow$

$(21x^2-55x+36)^2= 10^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 21x^2-55x+36=10 \\ 21x^2-55+36=-10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x^2-55x+26=0 \Leftrightarrow x=2, \text{ή}, x=\frac{13}{21} \\ 21x^2-55x+46=0, \text{αδυνατη} \end{cases}$

√ ***4.*** *Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση* $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

Λύση:

$\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6. \Leftrightarrow \log_3 x - 2\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 6 \Leftrightarrow$

$\log_3 x - 2\frac{\log_3 x}{\log_3 3^{-1}} = 6 \Leftrightarrow \log_3 x - 2\frac{\log_3 x}{-\log_3 3} = 6 \Leftrightarrow \log_3 x - 2\frac{\log_3 x}{-1} = 6 \Leftrightarrow$

$\log_3 x + 2\log_3 x = 6 \Leftrightarrow 3\log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow 3^2 = x \Leftrightarrow x = 9$

5. *Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση:*

$2(\log2-1)+\log(5^{\sqrt{x}}+1) = \log(5^{1-\sqrt{x}}+5)$

Λύση:

$2(\log2-1)+\log(5^{\sqrt{x}}+1) = \log(5^{1-\sqrt{x}}+5) \Leftrightarrow$

$$2\log 2 - 2 + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5) \Leftrightarrow$$

$$\log 2^2 - \log 10^2 + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5) \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{(5^{\sqrt{x}} + 1)4}{100} = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5) \Leftrightarrow \frac{5^{\sqrt{x}} + 1}{25} = \frac{5}{5^{\sqrt{x}}} + 5 \quad (1)$$

Θέτω $5^{\sqrt{x}} = y > 0$

και από την (1) παίρνω :

$$\frac{y+1}{25} = \frac{5}{y} + 5 \Leftrightarrow y^2 - 124y - 125 = 0 \Leftrightarrow y = 125$$ γιατί $y>0$.

$\Delta = 15876 = 126^2$

$y_1 = -1$, $y_2 = 125$

απορ.

Άρα $5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\log(3x-5)+\log(4x+3)=\log 8$

2. $\ln x-\ln(x+1)=\ln 2-\ln(x^2-1)$

3. $\log(35-x^3)=3\log(5-x)$

4. $\log(5x+10)+\log(x-2)=2+4\log 2$

5. $\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{5x}=1$

6. $\log_2(7x-9)^2+\log_2(3x-4)^2=6+\log_2 36$

7. $\log_3\sqrt{5x-2}+\log_3\sqrt{x+1}=1+\log_3 2$

8. $2\log x+\log 36+2\log \alpha=\log 25+2\log\beta$

9. $\log[\log(5x+6)]=0$

10. $\log\left[\log(15x^2+26x+8\right]=0$

11. $(\log x-2)^2+\log x(\log x-1)=(\log x)^2-2$

12. $\dfrac{7\log x+4}{5}-\log x=\dfrac{3\log x-5}{2}$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια εξίσωση ονομάζεται εκθετική όταν εμφανίζεται σ' αυτή δύναμη με εκθέτη, παράσταση που περιέχει τον άγνωστο.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Για να επιλυθούν οι εκθετικές εξισώσεις πρέπει να φτάσουμε σε μια ισότητα με ίδιες βάσεις. Οπότε αφού οι βάσεις είναι ίδιες για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι εκθέτες να είναι ίσοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν η εκθετική εξίσωση έχει τη μορφή $\alpha^x = \kappa$ και το κ δεν γράφεται σαν δύναμη του α, τότε η εξίσωση λύνεται με την βοήθεια των λογαρίθμων.

1) Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εκθετικές εξισώσεις:

α) $8^x = 0,5 \Rightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-1} \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

β) $2^{5x+1} = 64 \Rightarrow 2^{5x+1} = 2^6 \Rightarrow 5x+1 = 6 \Rightarrow 5x = 6-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} \Rightarrow x = 1$

γ) $5^{2x-9} = 625 \Rightarrow 5^{2x-9} = 5^4 \Rightarrow 2x-9 = 4 \Rightarrow 2x = 4+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$

δ) $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

ε) $3^x = 729 \Rightarrow 3^x = 3^6 \Rightarrow x = 6$

στ) $3^{x^2-5x+11} = 243 \Rightarrow 3^{x^2-5x+11} = 3^5 \Rightarrow x^2 - 5x + 11 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$

ζ) $2^{\frac{(3x+2)}{4}} = 8^{5x-4} \Leftrightarrow 2^{\frac{(3x+2)}{4}} = 2^{3(5x-4)} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{4} = 3(5x-4) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 3x+2 = 60x - 48 \Leftrightarrow 57x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{57}$

η) $5^{x^2} = 25^{x^2-2} \Leftrightarrow 5^{x^2} = 5^{2(x^2-2)} \Leftrightarrow x^2 = 2(x^2-2) \Leftrightarrow x^2 = 2x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

θ) $4^{-x} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 4^{-x} = \frac{1}{4^3} \Leftrightarrow 4^{-x} = 4^{-3} \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$

ι) $27^{7x-2} = 9^{5x+3}$

$27^{7x-2} = 9^{5x+3} \Leftrightarrow 3^{3(7x-2)} = 3^{2(5x+3)} \Leftrightarrow 3(7x-2) = 2(5x+3) \Leftrightarrow$

$21x - 6 = 10x + 6 \Leftrightarrow 11x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{11}$

ια) *Να λυθεί η εξίσωση:* $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $4^x - 7(2^x) - 8 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x - 7(2^x) - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 7(2^x) - 8 = 0$ Θέτω $2^x = ω$ και έχω

$ω^2 - 7ω - 8 = 0 \Leftrightarrow ω_1 = -1$ απορρίπτεται

$ω_2 = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

ιβ) *Να λυθεί η εξίσωση:* $3^{x+2} + 5(3^x) + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $3^{x+2} + 5(3^x) + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128 \Leftrightarrow$

$3^x 3^2 + 5(3^x) + 3^x 3^{-1} - 3^x 3^{-2} = 128$ Θέτω $3^x = ω$ και έχω

$9ω + 5ω + \frac{1}{3}ω - \frac{1}{9}ω = 128 \Leftrightarrow 81ω + 45ω + 3ω - ω = 9 * 128 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 128ω = 9 * 128 \Leftrightarrow ω = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

○ ***ιγ)** Να λυθεί η εξίσωση: $3 * 9^x - 5 * 6^x + 2^{2x+1} = 0$*

Λύση:

Έχουμε $3 * 9^x - 5 * 6^x + 2^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 3 * (3^2)^x - 5(2 * 3)^x + 2^{2x} * 2 = 0 \Leftrightarrow$

$3 * 3^{2x} - 5 * 2^x * 3^x + 2^{2x} * 2 = 0 \Leftrightarrow$ Διαιρώ με 3^{2x} και έχω

$$\frac{3 * 3^{2x} - 5 * 2^x * 3^x + 2^{2x} * 2}{3^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 3 - 5\frac{2^x}{3^x} + 2\left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 = 0$$

θέτω $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega > 0$ και έχω :

$$3 - 5\omega + 2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 - 5\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3}{2} \text{ και } \omega_2 = 1$$

Άρα για $\omega_1 = \frac{3}{2}$ έχω $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Και για $\omega_2 = 1$ έχω $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$

○ ***Ιδ)** Να λυθούν οι εξισώσεις: $x^x = 4$, $x^x = -1$*

Λύση:

$x^x = 4 \Leftrightarrow x^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

$x^x = -1 \Leftrightarrow x^x = (-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

2) *Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εκθετικές εξισώσεις:α)* $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$,

β) $2^{3x}=\frac{1}{64}$, *γ)* $9^x-8*3^x-9=0$

Λύση:

α) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=2^4*2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=2^{4+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$x^2-6x-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x^2-6x-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow x^2-6x-7=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=7$ ή $x=-1$

β) $2^{3x}=\frac{1}{64}\Leftrightarrow 2^{3x}=\frac{1}{2^6}\Leftrightarrow 2^{3x}=2^{-6}\Leftrightarrow 3x=-6\Leftrightarrow x=-2$

γ) $9^x-8*3^x-9=0\Leftrightarrow(3^x)^2-8*3^x-9=0$ θέτουμε $3^x=y$

οπότε έχω $y^2-8y-9=0$ που έχει ρίζες $y_1=-1$ $y_2=9$. Άρα $3^x=-1$ και $3^x=9$

Από αυτές η πρώτη είναι αδύνατη, αφού $3^x>0$, ενώ η δεύτερη γράφεται $3^x=3^2$ και έχει ρίζα x=2, που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

3) *Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εκθετικές εξισώσεις α)* $2^{2x+1}-4*2^x=0$, *β)* $2*4^x-5*2^x+2=0$, *γ)* $3^{2x+1}-26*3^x-9=0$

Λύση:

α) $2^{2x+1}-4*2^x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x}*2-4*2^x=0\Leftrightarrow(2^x)^2 2-4*2^x=0$ Θέτουμε όπου $2^x=y$

$\Leftrightarrow 2y^2-4y=0\Leftrightarrow 2y(y-2)=0\Leftrightarrow$ (1)

$2y=0$ ή $y-2=0\Leftrightarrow$ y=0 ή y=2 αντικαθιστώ αυτές τις ρίζες στην (1) και έχω : $2^x=0$ (απορρίπτεται)

$2^x=2\Leftrightarrow x=1$

β) $2*4^x-5*2^x+2=0 \Leftrightarrow 2(2^x)^2-5*2^x+2=0$ όπου $2^x=y$ (1) $\Leftrightarrow$

$2y^2-5y+2=0$ Δ=25-16 = 9>0 $\rho_{1,2}=\frac{+5\pm3}{4}=$ 2 ή $\frac{1}{2}$

Άρα $2^x=2 \Rightarrow x=1$ και $2^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x=2^{-1} \Leftrightarrow x=-1$

Άρα οι ρίζες είναι x=-1 ή x=1

γ) $3^{2x+1}-26*3^x-9=0 \Leftrightarrow (3^x)^2 3-26*3^x-9=0 \Leftrightarrow$ θέτουμε $3^x=y$

$\Leftrightarrow 3y^2-26y-9=0$ Με Δ=784 $\rho_1=-1/3$, $\rho_2=9$

$3^x=-1/3$ απορρίπτεται γιατί $3^x>0$ και $3^x=3^2 \Rightarrow x=2$

4) *Να λυθούν στο ℝ οι εκθετικές εξισώσεις: α)* $x^{x^2+x-6}=1$,
β) $7^{x+1}-\frac{35}{7^x}-44=0$, *γ)* $a^{2x}a^{x-4}=a^{20}*\sqrt[x-5]{a^{3x}}$,
δ) $2^{x-1}-3^{x-3}=2^{x-3}+3^{x-4}$, *ε)* $3^{2x-2}*5^{x-2}*7^{1-x}=4^{x-1}*5^{-x}$,
στ) $3^{2x+1}-5*6^x+2*4^x=0$, *ζ)* $5*2^{4x}-9*20^x+4*5^{2x}=0$,
η) $3*2^{x-4}-5^{x-2}=2^{x-1}-6*5^{x-3}$, *θ)* $4^{2x}-24*4^x+128=0$.

Λύση:

α) $x^{x^2+x-6}=1$ Πρέπει το x>0 και $x\neq1$ έχουμε : $x^{x^2+x-6}=x^0 \Leftrightarrow$

$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 & \text{Δεκτή} \\ x_2=-3 & \text{~~Δεκτή~~ ΔΕΚΤΗ} \end{cases}$ Άρα τελικά ~~[illegible]~~ x=-3 ή x=2

[illegible]

β) $7^{x+1}-\frac{35}{7^x}-44=0 \Leftrightarrow 7^x7-\frac{35}{7^x}-44=0$ Θέτουμε $7^x=\omega>0$, οπότε γίνεται

$7\omega-\frac{35}{\omega}-44=0 \Leftrightarrow 7\omega^2-44\omega-35=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1=7 \\ \omega_2=-\frac{5}{7} \end{cases}$

οπότε $7^x=7 \Leftrightarrow x=1$ δεκτή και $7^x=-\frac{5}{7}$ απορρίπτεται.

γ) $a^{2x}a^{x-4} = a^{20} * \sqrt[x-5]{a^{3x}}$ Πρέπει a>0 και x-5>0 $\Leftrightarrow$ x>5 και $x \in \mathbb{N}$

Έχουμε

$$a^{2x}a^{x-4} = a^{20} * \sqrt[x-5]{a^{3x}} \Leftrightarrow a^{2x+x-4-20} = \sqrt[x-5]{a^{3x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{3x-24} = \sqrt[x-5]{a^{3x}} \Leftrightarrow a^{3(x-8)(x-5)} = a^{3x} \Leftrightarrow a^{3(x^2-13x+40)} = a^{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-13x+40) = 3x \Leftrightarrow x^2-13x+40 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{Απορρίπτεται} \\ x = 10 & \text{Δεκτή} \end{cases}$$

δ) $2^{x-1} - 3^{x-3} = 2^{x-3} + 3^{x-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^x2^{-1} - 3^x3^{-3} = 2^x2^{-3} + 3^x3^{-4} \Leftrightarrow \frac{2^x}{2} - \frac{3^x}{27} = \frac{2^x}{8} + \frac{3^x}{81} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{8} = \frac{3^x}{27} + \frac{3^x}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{8}(4*2^x - 2^x) = \frac{1}{81}(3*3^x + 3^x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3*2^x}{8} = \frac{4*3^x}{81} \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{4*8}{81*3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^2 2^3}{3^4 3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^5}{3^5} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = 5$$

ε) $3^{2x-2} * 5^{x-2} * 7^{1-x} = 4^{x-1} * 5^{-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-2} * 5^{x-2} * 5^x = 4^{x-1} * 7^{x-1} \Leftrightarrow 3^{2x-2} * 5^{2x-2} = 4^{x-1} * 7^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3*5)^{2x-2} = (4*7)^{x-1} \Leftrightarrow (15)^{2x-2} = (28)^{x-1} \Leftrightarrow (225)^{x-1} = (28)^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{225}{28}\right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{225}{28}\right)^{x-1} = \left(\frac{225}{28}\right)^0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

στ) $3^{2x+1} - 5*6^x + 2*4^x = 0 \Leftrightarrow$

$$3^{2x+1} - 5*6^x + 2*4^x = 0 \Leftrightarrow 3^{2x}*3 - 5*(3*2)^x + 2(2^2)^x = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3*3^{2x} - 5*3^x*2^x + 2*2^{2x} = 0 \Leftrightarrow$ *(Διαιρούμε με 2^{2x})*

$$\Leftrightarrow 3*\frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 5*\frac{3^x*2^x}{2^{2x}} + 2*\frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ = ω και έχουμε $3\omega^2-5\omega+2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\omega = 1\\ \omega = 2/3\end{cases} \text{ Άρα } \begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2/3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1\end{cases}$$

ζ) $5*2^{4x} - 9*20^x + 4*5^{2x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5(2^2)^{2x} - 9(4*5)^x + 4*5^{2x} = 0 \Leftrightarrow 5*4^{2x} - 9*4^x*5^x + 4*5^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\frac{4^{2x}}{5^{2x}} - 9\frac{4^x5^x}{5^{2x}} + 4\frac{5^{2x}}{5^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} - 9\left(\frac{4}{5}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \omega > 0$ και έχουμε:

$$\Leftrightarrow 5\omega^2 - 9\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega = 1\\ \omega = \frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0\\ \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1\end{cases}$$

η) $3*2^{x-4} - 5^{x-2} = 2^{x-1} - 6*5^{x-3} \Leftrightarrow$

$$3*2^x*2^{-4} - 5^x*5^{-2} = 2^x*2^{-1} - 6*5^x*5^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{2^x}{2^4} - \frac{5^x}{5^2} = \frac{2^x}{2} - 6\frac{5^x}{5^3} \Leftrightarrow \frac{3*2^x}{16} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{25} - \frac{6*5^x}{125} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{16}\left(3*2^x - 8*2^x\right) = \frac{1}{125}\left(5*5^x - 6*5^x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\left(-5*2^x\right) = \frac{1}{125}\left(-5^x\right) \Leftrightarrow -\frac{5*2^x}{16} = -\frac{5^x}{125} \Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} = \frac{16}{625} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \Leftrightarrow x = 4$$

θ) $4^{2x} - 24*4^x + 128 = 0$ θέτουμε $4^x = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2-24\omega+128=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega = 8\\ \omega = 16\end{cases}$$

$$\text{Άρα } \begin{cases}4^x = 8 \Leftrightarrow (2)^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2\\ 4^x = 16 \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2\end{cases}$$

5. *Να λυθούν οι εκθετικές εξισώσεις: α)* $4^x + 2^{x+1} = 80$, *β)* $4^{2x-1} + 8 = 33\cdot 4^{x-1}$, *γ)* $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$, *δ)* $3\cdot 3^{2x} + 3\cdot 3^x = 270$, *ε)* $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$, *στ)* $125\sqrt[x]{5^{2+3x}} = \sqrt[x]{5^{26}}$

Λύση:

α) $4^x + 2^{x+1} = 80 \Leftrightarrow (2^2)^x + 2^{x+1} - 80 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 80 = 0$ (1)

Θέτουμε $2^x = \omega > 0$ (2) οπότε προκύπτει:

$$\left.\begin{matrix} \omega^2 + 2\omega - 80 = 0 \\ \omega > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \omega_1 = 8, \omega_2 = -10 \\ \omega > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \omega = 8$$

Έτσι έχουμε από τη (2) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

β) $4^{2x-1} + 8 = 33\cdot 4^{x-1} \Leftrightarrow 4^{2x}\cdot 4^{-1} + 8 = 33\cdot 4^x \cdot 4^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4^x)^2 \cdot \frac{1}{4} + 8 = 33\cdot 4^x \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow (4^x)^2 + 32 = 33\cdot 4^x \Leftrightarrow (4^x)^2 - 33\cdot 4^x + 32 = 0$ (1)

Θέτουμε $4^x = \omega > 0$ οπότε από την (1) προκύπτει:

$$\left.\begin{matrix} \omega^2 - 33\omega + 32 = 0 \\ \omega > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = 32$$

- Για ω=1, παίρνουμε: $4^x = 1 \Leftrightarrow 4^x = 4^0 \Leftrightarrow x = 0$
- Για ω=32, παίρνουμε: $4^x = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Άρα οι λύσεις της εκθετικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί: 0, $\frac{5}{2}$.

γ) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448 \Leftrightarrow 2^x 2^{-1} + 2^x 2^{-2} + 2^x 2^{-3} = 448 \Leftrightarrow$

$2^x \frac{1}{2} + 2^x \frac{1}{2^2} + 2^x \frac{1}{2^3} = 448 \Leftrightarrow 2^x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 448 \Leftrightarrow 2^x\left(\frac{7}{8}\right) = 448 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 448\cdot\frac{8}{7} \Leftrightarrow 2^x = 512 \Leftrightarrow 2^x = 2^9 \Leftrightarrow x = 9$

$(512 = 2^9)$

δ) $3\cdot 3^{2x} + 3\cdot 3^x = 270 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x} + 3\cdot 3^x - 270 = 0 \Leftrightarrow 3(3^{2x} + 3^x - 90) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 90 = 0$ (1) Θέτουμε $3^x = \omega > 0$ (2) οπότε προκύπτει:

$$\left.\begin{matrix} \omega^2+\omega-90=0 \\ \omega>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \omega=9 \text{ ή } \omega=-10 \\ \omega>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \omega=9$$ Έτσι από την (2)

προκύπτει $3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2 \Leftrightarrow x=2$

ε) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x+3^x \cdot 3^{-1}+3^x3^{-2}+3^x3^{-3}+3^x3^{-4}=363 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x+3^x\dfrac{1}{3}+3^x\dfrac{1}{3^2}+3^x\dfrac{1}{3^3}+3^x\dfrac{1}{3^4}=363 \Leftrightarrow$

$3^x+3^x\dfrac{1}{3}+3^x\dfrac{1}{9}+3^x\dfrac{1}{27}+3^x\dfrac{1}{81}=363 \Leftrightarrow 3^x\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}\right)=363 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x(81+27+9+3+1)=81 \cdot 363 \Leftrightarrow 3^x \cdot 121=81 \cdot 363 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x=81 \cdot 3 \Leftrightarrow 3^x=3^4 \cdot 3 \Leftrightarrow 3^x=3^5 \Leftrightarrow x=5$

στ) $125\sqrt[x]{5^{2+3x}}=\sqrt[x]{5^{26}}$ Πρέπει $x \in \mathbb{N}^*$. Έχουμε:

$125\sqrt[x]{5^{2+3x}}=\sqrt[x]{5^{26}} \Leftrightarrow \left(125\sqrt[x]{5^{2+3x}}\right)^x=\left(\sqrt[x]{5^{26}}\right)^x \Leftrightarrow 125^x \cdot 5^{2+3x}=5^{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{3x} \cdot 5^{2+3x}=5^{26} \Leftrightarrow 5^{3x+2+3x}=5^{26} \Leftrightarrow 5^{6x+2}=5^{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x+2=26 \Leftrightarrow 6x=24 \Leftrightarrow x=4$ Δεκτή

6. *Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $27^x-3 \cdot 9^x+3^{x+1}-1=0$,*
β) $5 \cdot 2^{4x}-9 \cdot 20^x+4 \cdot 5^{2x}=0$, γ) $3^{2x+1}-5 \cdot 6^x+2 \cdot 4^x=0$

__Λύση:__

α) $27^x-3 \cdot 9^x+3^{x+1}-1=0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^3-3\left(3^x\right)^2+3^x3-1=0$

Θέτουμε $3^x=\omega>0$, οπότε είναι:

$\omega^3-3\omega^2+3\omega-1=0 \Leftrightarrow (\omega-1)^3=0 \Leftrightarrow \omega=1$

Άρα $3^x=1 \Leftrightarrow 3^x=3^0 \Leftrightarrow x=0$ Δεκτή

β) $5 \cdot 2^{4x}-9 \cdot 20^x+4 \cdot 5^{2x}=0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(2^2\right)^{2x}-9(4 \cdot 5)^x+4 \cdot 5^{2x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \cdot 4^{2x}}{5^{2x}}-\frac{9 \cdot 4^x \cdot 5^x}{5^{2x}}+\frac{4 \cdot 5^{2x}}{5^{2x}}=0 \Leftrightarrow 5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x\right]^2-9\left(\frac{4}{5}\right)^x+4=0$$

Θέτουμε $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\omega>0$ και έχουμε: $5\omega^2-9\omega+4=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=4/5$. Άρα

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\left(\dfrac{4}{5}\right)^0 \Leftrightarrow$ **x=0** ή $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\left(\dfrac{4}{5}\right)^1 \Leftrightarrow$ **x=1**

γ) $3^{2x+1}-5\cdot 6^x+2\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3-5(2\cdot 3)^x+2\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}\cdot 3}{4^x}-\frac{5\cdot 2^x\cdot 3^x}{4^x}+\frac{2\cdot 4^x}{4^x}=0 \Leftrightarrow 3\frac{3^{2x}}{2^{2x}}-5\frac{2^x\cdot 3^x}{2^{2x}}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-5\left(\frac{3}{2}\right)^x+2=0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\omega>0$ και έχουμε: $3\omega^2-5\omega+2=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=2/3$. Άρα

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \mathbf{x=0}$$

ή

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{x=-1}$$

ΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μάθαμε ότι όταν μια εκθετική εξίσωση καταλήξει σε ισότητα δυνάμεων με ίσες βάσεις τότε για να υπολογίσουμε τη ρίζα εξισώνουμε τους εκθέτες.

Αν οι βάσεις δεν είναι ίδιες τότε για να υπολογίσουμε τη ρίζα της εξίσωσης λογαριθμίζουμε, συνήθως με βάση το δέκα.

Δηλαδή αν $\alpha^x=\beta$ τότε $\log\alpha^x=\log\beta \Leftrightarrow x=\dfrac{\log\beta}{\log\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να λυθούν οι εξισώσεις α)* $2^x=5^{x+2}$, *β)* $3^{x+1}+2^{x-2}-3^x=2^{x+3}$

Λύση:

α) $2^x=5^{x+2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log 2^x=\log 5^{x+2}\Leftrightarrow x\log 2=(x+2)\log 5\Leftrightarrow x\log 2=x\log 5+2\log 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\log 2-x\log 5=2\log 5\Leftrightarrow x(\log 2-\log 5)=2\log 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\log 5}{\log\frac{2}{5}}\Leftrightarrow x=\log_{2/5}25$$

β) $3^{x+1}+2^{x-2}-3^x=2^{x+3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3*3^x+2^x2^{-2}-3^x=2^x2^3\Leftrightarrow 3*3^x+\frac{2^x}{4}-3^x=8*2^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2*3^x=2^x\left(8-\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow 2*3^x=\frac{31}{4}2^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{31}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right)^x=\log\left(\frac{31}{8}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\log 31/8}{\log 3/2}$$

2. *Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις: α. $log(x^2 + x + 1) = 0$,*

β) $2^{x^2+x+1} = 1$

<u>Λύση:</u>

α. $\log(x^2 + x + 1) = 0$

Πρέπει να είναι $x^2 + x + 1 > 0$. Η εξίσωση σύμφωνα με τον ορισμό γίνεται:

$10^0 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x=0 ή x=-1 που είναι και οι δύο δεκτές.

β) $2^{x^2+x+1} = 1 \Rightarrow 2^{x^2+x+1} = 2^0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$

Δ= -3<0 που είναι αδύνατη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\left(5^{2x-1}\right)^{3-5x} = 1$ Α.Π. $(x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{3}{5})$

2. $x^{2x^2-3x-2} = 1$ Α.Π. $(x = 2$ ή $x = 1)$

3. $5^{x^4-10x^2+9} = 1$ Α.Π. $(x = \pm 1$ ή $x = \pm 3)$

4. $100 * 10^x = 1000^{5/x}$ Α.Π. $(x = -5$ ή $x = 3)$

5. $4^x - 9 * 2^x + 8 = 0$ Α.Π. $(x = 0$ ή $x = 3)$

6. $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$ Α.Π. $(x = 5)$

7. $5^{2x-1} + 3 * 5^{x+1} = 80$ Α.Π. $(x = 1)$

8. $3^{2x+1} - 5 * 6^x + 2 * 4^x = 0$ Α.Π. $(x = 0$ ή $x = -1)$

9. $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$ Α.Π. $(x = 3)$

10. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x-2}$ Α.Π. $(x = 1)$

11. $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$ Α.Π. $(x = 2)$

12. $2 * 9^x - 5 * 3^x - 3 = 0$ Α.Π. $(x = 1)$

13. $3^{x+1} + 9^{x-2} = 28$ Α.Π. $(x = 2)$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

Χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου ονομάζεται το ακέραιο μέρος του.

α) Όταν ο λογάριθμος είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα A>1(logA).

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 5,5.
  Αυτός βρίσκεται: $1 < 5{,}5 < 10$

  $\log 1 < \log 5{,}5 < \log 10 \Rightarrow$

  $0 < \log 5{,}5 < 1$

  Δηλαδή ο log5,5 είναι μεγαλύτερος από το μηδέν και μικρότερος από την μονάδα, δηλαδή ισούται με 0,...... και πέντε δεκαδικά ψηφία τα οποία τα βρίσκουμε στους πίνακες.

- Έστω τώρα ψάχνουμε τον λογάριθμο του 52,5.
  Αυτός βρίσκεται: $10 < 52{,}5 < 100$

  $\log 10 < \log 52{,}5 < \log 100 \Rightarrow$

  $1 < \log 52{,}5 < 2$

  Δηλαδή ο log52,5 είναι μικρότερος του 2 και μεγαλύτερος της μονάδας. Άρα θα είναι 1,.....(και πέντε δεκαδικά ψηφία τα οποία τα βρίσκουμε από τους πίνακες)

- Έστω τώρα ψάχνουμε τον log328,4 .
  Αυτός βρίσκεται: $100 < 328{,}4 < 1000$

  $\log 100 < \log 328{,}4 < \log 1000 \Rightarrow$

  $2 < \log 328{,}4 < 3$

  Δηλαδή ο log328,4 είναι μικρότερος του τρία και μεγαλύτερος δύο. Άρα θα είναι 2,...

Από αυτά τα παραδείγματα καταλαβαίνουμε ότι όταν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από την μονάδα για να βρούμε το ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ αφαιρούμε από το πλήθος των ψηφίων που βρίσκονται αριστερά της υποδιαστολής την μονάδα.

β) <u>Όταν ο αριθμός είναι θετικός και μικρότερος της μονάδας 0<A<1 (logA)</u>

- Το χαρακτηριστικό αυτής της κατηγορίας εκφράζεται με αρνητικές μονάδες, ο αριθμός των οποίων καθορίζεται πάντα από την θέση του πρώτου σημαντικού ψηφίου μετά την υποδιαστολή.

<u>Παραδείγματα:</u>

$$\log 0,005 = \bar{3},......$$

$$\log 0,64 = \bar{1},......$$

$$\log 0,08 = \bar{2},......$$

$$\log 0,0005 = \bar{4},......$$

- Για ευκολία όμως στον αρνητικό αυτό αριθμό προσθέτουμε δέκα μονάδες τις οποίες όμως στο τέλος των πράξεων τις αφαιρούμε. Έτσι οι παραπάνω λογάριθμοι γίνονται:

$$\log 0,005 = 7,......,(-10)$$

$$\log 0,64 = 9,......,(-10)$$

$$\log 0,08 = 8,......,(-10)$$

$$\log 0,0005 = 6,......(-10)$$

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΤΕΣΣΕΡΑ ΨΗΦΙΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: log1152 (τετραψήφιος αριθμός)

α) Βρίσκω πρώτα το χαρακτηριστικό. 3,.....

β) Παίρνω τα τρία πρώτα ψηφία (115), βρίσκω αυτόν τον αριθμό στην κάθετη στήλη στους πίνακες, το δε τέταρτο ψηφίο(2), το βρίσκω στην οριζόντια στήλη (άνω ή κάτω), οπότε εκεί που διασταυρώνονται αυτά βρίσκω τα πέντε δεκαδικά ψηφία του ζητούμενου λογαρίθμου. Άρα log1152=3,06145.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν οι παρακάτω λογάριθμοι

α) log0,1152= $\bar{1}$,06145 ή 9,06145 (-10)

β) log1,152=0,06145

γ) log11,52=1,06145

δ) log115,2=2,06145

ε) log1152=3,06145

στ) log115=2,06070 (log115,0)

ζ) log11=1,04139 (log11,00)

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΑ ΨΗΦΙΑ

1. *log25647=;* (αριθμός πενταψήφιος)

α) Πρώτα βρίσκω το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου. 4,......

β) Μετά τα τέσσερα πρώτα ψηφία βάζω κόμμα και έτσι ο αριθμός γίνεται 2464,7. Στους λογαριθμικούς πίνακες ο αριθμός αυτός δεν υπάρχει. Βρίσκεται όμως μεταξύ:

d=1

d=0,7

παρεμβολή 2564 < 2564,7 < 2565 ⇒ λογαριθμίζω

log2564 < log2564,7 < log2565

40892 ←— d=17 —→ 40909

Όταν αυξάνει ο αριθμός αυτός κατά μία μονάδα ο λογάριθμος του αυξάνει κατά 17 δεκαδικές μονάδες. Έτσι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τριών βρίσκουμε την αύξηση του αριθμού κατά 0,7.

Σε d=1 έχουμε αύξηση 17 $x=\frac{17 * 0,7}{1}=11,9 \simeq 12$

Σε d=0,7 πόση αύξηση έχουμε;

Αυτόν τον αριθμό $(\simeq 12)$ τον προσθέτουμε στον λογάριθμο του μικρότερου αριθμού (40892 + 12=40904) και έτσι βρίσκω το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου 40904

Άρα log25647=4,40904

2. *log967845=;* (εξαφήφιος αριθμός)

α) Χαρακτηριστικό:5,......

β) Μετά τα τέσσερα ψηφία βάζω κόμμα και έτσι ο αριθμός γίνεται log9678,45

d=1

d=0,45

παρεμβολή: $\log 9678 < \log 9678{,}45 < \log 9679$

d=4

98579 ⟷ 98583

Σε d=1 d=4 $x = \frac{4 * 0{,}45}{1} = 1{,}80 \approx 2$

Σε d=0,45 d=;

$$\begin{array}{r} 98579 \\ +\quad 2 \\ \hline 98581 \end{array}$$

Ο αριθμός 98581 είναι το δεκαδικό μέρος του ζητούμενου λογάριθμου. Άρα log967845=5,98581

3. *log715345=;*

α) Χαρακτηριστικό:5,......

β) Δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου.

d=1

d=0,45

παρεμβολή $\log 7153 < \log 7153{,}45 < \log 7154$

d=6

85449 ⟷ 85455

Σε d=1 d=6 $x = \frac{6 * 0{,}45}{1} = 2{,}70 \approx 3$

Σε d=0,45 d=;

$$\begin{array}{r} 85449 \\ +\quad 3 \\ \hline 85452 \end{array}$$

Το δεκαδικό μέρος είναι 85452. Άρα log715345=5,85452

1° *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ*

Να υπολογιστεί ο log715345

Χωρίζουμε τα τέσσερα πρώτα ψηφία. Έτσι έχουμε: log7153,45.

Ο αριθμός 7153,45 βρίσκεται σχεδόν μεταξύ των τετραψήφιων αριθμών 7153 και 7154 που έχουν αντίστοιχα λογαρίθμους 85449 και 85455. Η διαφορά αυτών των λογαρίθμων έιναι 6. Το διαιρώ δια δύο (6:2=3) και το τρία το προσθέτω στον μικρότερο λογάριθμο. Έτσι το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου είναι 85452.

Άρα log715345=5,85452

2ο *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ*

Να υπολογιστεί ο log72,243

Χωρίζουμε τα τέσσερα πρώτα ψηφία. Έτσι έχουμε log7224,3.

Ο αριθμός 7224,3 βρίσκετε μεταξύ του αριθμού 7224 και 7225. . Βρίσκω τους λογαρίθμους των αριθμών 7224 και 7225 που είναι αντίστοιχα 85878 και 85884. Η διαφορά αυτών είναι έξι. Το διαιρώ δια του τέσσερα(6:4=1,5≈2) και το αποτέλεσμα της διαίρεσης το προσθέτω στον μικρότερο λογάριθμο (85878+2= 85880). Ο αριθμός αυτός είναι το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου (κατά προσέγγιση).

Άρα log72,243=1,85880

- Και στα δύο παραπάνω παραδείγματα έγινε κάποιο λάθος άλλα για ένα μεγάλο φορτίο ή για μια μεγάλη απόσταση αυτό το λάθος είναι αμελητέο.

4. log72,353=;

α) Χαρακτηριστικό: 1,......

β) Δεκαδικό μέρος λογαρίθμου

d=1

d=0,3

παρεμβολή: log7235<log7235,3<log7236

d=6

85944 ⟵⟶ 85950

Σε d=1 d=6 $x=\frac{6*0,3}{1}=1,8\simeq 2$

Σε d=0,3 d=;

$$\begin{array}{r} 85944 \\ +\quad 2 \\ \hline 85946 \end{array}$$

Το δεκαδικό μέρος είναι 85946. Άρα log72,353=1,85946

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εν γνώσει μας κάναμε ένα λάθος. Χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των τριών υποθέτοντας ότι τα ποσά (αριθμοί - λογάριθμοι) ανάλογα. Αυτά όμως δεν είναι ανάλογα. Διότι ο log100=2, ο log 1000= 3, ενώ έπρεπε να είναι δεκαπλάσιος του 2 (ο log1000) αν τα ποσά ήταν ανάλογα. Τότε δεν θα χρειαζόταν οι πίνακες. Όμως, επειδή η μεταβολή εδώ είναι μικρή, το σφάλμα είναι μικρό και συγχωρείται η παράτυπη εφαρμογή της μεθόδου των τριών.

2. Εάν δεν μας ενδιαφέρει η μεγάλη προσέγγιση μπορούμε να μην εφαρμόζουμε το παραπάνω αλλά να εργαζόμαστε ως εξής.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ Ο ΟΠΟΙΟΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΔΟΘΕΝΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ.

1° ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να υπολογιστεί ο θετικός αριθμός Α για τον οποίο ισχύει: logA=1,85872

α) Παίρνω μόνο το δεκαδικό μέρος 85872. Ανατρέχω στην δεύτερη στήλη των λογαριθμικών πινάκων και στην περιοχή του 85(τα πρώτα δυο ψηφία του δεκαδικού μέρους) σε όλες τις στήλες αναζητάμε το τριψήφιο τμήμα 872.
Βλέπουμε ότι το 85872 βρίσκεται στη διασταύρωση της κάθετης στήλης που αντιστοιχεί στον αριθμό 722 και της οριζόντιας σειράς που αντιστοιχεί στον αριθμό τρία. Επομένως ο αντίστοιχος ζητούμενος αριθμός είναι 7223.(Περιέχει τέσσερα ψηφία.722-3)

β) Εξετάζω τώρα το χαρακτηριστικό του δοθέντος λογάριθμου. Το χαρακτηριστικό είναι η μονάδα, άρα ο αριθμός έχει δύο ακέραια ψηφία.(1+1=2). Στον τετραψήφιο αριθμό που βρήκαμε προηγουμένως χωρίζω τα δυο πρώτα ακέραια ψηφία. Άρα logA=1,85872 $\Rightarrow$ A=72,23

2°	logA=2,26505	(A=184,1)
3°	logA=1,95163	(A=89,46)
4°	logA=0,55534	(A=3,592)
5°	logA=2,02202	(A=105,2)
6°	logA=9,70986 (-10)	(A=0,5127)
7°	logA=8,95143 (-10)	(A=0,08942)

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ Ο ΟΠΟΙΟΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΔΟΘΕΝΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ.

1° *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ*: Να υπολογιστεί ο θετικός αριθμός Α για τον οποίο ισχύει: logA=6,86050.

α) Ανατρέχουμε στους λογαριθμικούς πίνακες και βλέπουμε ότι το δεκαδικό μέρος 86050 δεν υπάρχει αλλά περιέχεται μεταξύ των παρακάτω αριθμών

d=6

d=4

παρεμβολή 86046 < 86050 < 86052

d=1

7252 ⟷ 7253

Σε αύξηση κατά 6 (0,00006) αντιστοιχεί αύξηση κατά 1

Σε αύξηση κατά 4 (0,00004) αντιστοιχεί αύξηση κατά x=;

$x=\frac{1*4}{6}=\frac{2}{3}=0,666.......$ Αυξάνω το 7252 κατά 0,666....

(7252+0,666....=7252,666....)

αγνοώντας την υποδιαστολή: 725266...

β) Το χαρακτηριστικό έξι φανερώνει ότι ο αριθμός έχει επτά ψηφία. Άρα Α= 7252666,666

2° *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ*: Ομοίως logA=$\overline{3}$,86180

d=6

d=3

86177 < 86180 < 86183

d=1

7274 ⟷ 7275

Σε 6 αντιστοιχεί κατά 1

Σε 3 αντιστοιχεί κατά x=;

$x=\frac{3}{6}=0,5$

$$\begin{array}{r} 7274 \\ +\ 00,5 \\ \hline 7274,5 \end{array}$$

Άρα Α=0,0072745

3ο <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: Να υπολογιστεί ο θετικός αριθμός A για τον οποίο ισχύει: logA=3,38083

d=18

d=8

38075 < 38083 < 38093

d=1

2403 ⟷ 2404

Σε 18 αντιστοιχεί κατά 1

Σε 8 αντιστοιχεί κατά x=;

$$x=\frac{8}{18}=0,44$$

2403
\+ 0,44
2403,44

<u>Άρα A=2403,44</u>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί ο θετικός αριθμός A για τον οποίο ισχύει:

α.	$\log A=\bar{1},56229$,	(A=0,3650)
β.	logA=1,25527,	(A=18)
γ.	logA=1,62910,	(A=42,57)
δ.	logA=3,62315,	(A=4199)
ε.	logA=1,61247,	(A=40,97)
στ.	$\log A=\bar{2},62003$,	(A=0,04169)
ζ.	logA=4,57043,	(A=37190)
η.	logA=4,63814,	(A=43465)
θ.	$\log A=\bar{2},5825$	(A=0,0382383)
ι.	logA=6,55575	(A=3595420,0)

2. *Να υπολογιστεί ο θετικός αριθμός Α για τον οποίο ισχύει:* $\log A = \log \frac{47,82}{815,1}$

Λύση:

$\log A = \log \frac{47,82}{815,1} = \log 47,82 - \log 815,1 = 1,67961^{*} - 2,91121 =$

$= 11,67961 - 2,91121 = 8,76840(-10) = \bar{2},76840$

Άρα $A = 0,0586675$

*Παρατηρώ ότι ο δεύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο. Έτσι προσθέτω στον πρώτο αριθμό δέκα μονάδες τις οποίες αφαιρώ στο τέλος των πράξεων. [1,67961(+10)=11,67961(-10)]

3. *Να υπολογιστεί η παρακάτω παράσταση με την βοήθεια των λογαρίθμων: Α=89,46*0,04137*0,3214*

Λύση:

$\log A = \log(89,46 * 0,04137 * 0,3214) =$

$= \log 89,46 + \log 0,04137 + \log 0,3214 =$

$= 1,95163 + \bar{2},61669 + \bar{1},50705 =$

$= 1,95163 + 8,61669(-10) + 9,50705(-10) =$

$= 20,07537(-20) = 0,07537 \Rightarrow \log A = 0,07537$ και <u>$A = 1,18961$</u>

4. *Να υπολογιστεί η παρακάτω παράσταση με τη βοήθεια λογαρίθμων.* $A = \frac{0,08942 * 3,592}{105,2 * 0,5127}$

Λύση:

$\log A = \log \frac{0,08942 * 3,592}{105,2 * 0,5127} =$

$= \log(0,08942 * 3,592) - \log(105,2 * 0,5127) =$

$= \log 0,08942 + \log 3,592 - \log 105,2 - \log 0,5127 =$

$= 8,95143(-10) + 0,55534 - 2,02202 - 9,70986(-10) =$

$= 9,50677(-10) - 11,73188(-10) =$

$= 19,50677(-20) - 11,73188(-10) = 7,77489(-10) = \bar{3},77489$

Άρα <u>$A = 0,005955$</u>

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Sin=ημίτονο, csc=συντέμνουσα, tan=εφαπτομένη,
cot=συνεφαπτομένη, sec=τέμνουσα, cos=συνημίτονο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι των παρακάτω τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

1. *logημ(14^0 1′,2)=;*

Λύση:

d=1′

logημ(14^0 1′)<logημ(14^0 1′,2)<logημ(14^0 2′)

0′,2

9,38418 ⟵ d=51 ⟶ 9,38469

d=1′
d=0′,2
d=51

Σε d=1′ d=51

Σε d=0′,2 x=; $x=\frac{51*0,2}{1}=10,2\simeq 10$

$$\begin{array}{r} 9,38418 \\ +\quad 10 \\ \hline 9,38428 \end{array}$$

Άρα logημ(14^0 1′,2)=9,38428

2. *logημ(30^0 15′ 12″)=;*

Λύση:

logημ(30^0 15′)<logημ(30^0 15′ 12″)<logημ(30^0 16′)

9,70224 9,70245

d=60″
d=12″
d=21

Σε 1′=60″ d=21

Σε 12″ x=; $x=\frac{21*12}{60}\simeq 4$

$$\begin{array}{r} 9,70224 \\ +\quad 4 \\ \hline 9,70228 \end{array}$$

Άρα logημ(30^0 15′ 12″)=9,70228

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αποτέλεσμα που βρίσκουμε στην παρεμβολή πρέπει να προστίθεται όταν η τριγωνομετρική συνάρτηση είναι αύξουσα όπως το ΗΜΙΤΟΝΟ, ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ, ΤΕΜΝΟΥΣΑ στο πρώτο τεταρτημόριο(0^0 - 90^0). Το ότι είναι αύξουσα φαίνεται κα από το ότι οι λογάριθμοι αυξάνονται. Αν όμως οι λογάριθμοι ελαττώνονται όπως στο ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ, ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ, ΣΥΝΤΕΜΝΟΥΣΑ τότε το αποτέλεσμα της παρεμβολής αφαιρείται. Στο δεύτερο τεταρτημόριο (90^0 - 180^0) ισχύουν τα αντίστροφα.

3. logσυν(24^0 22′,6)=;

Λύση:

d=1′

logσυν(24^0 22′) > logσυν(24^0 22′,6) > logσυν(24^0 23′) d=1′

d = 0′,6 d=0′,6

d=6

9,95948 ← d=6 → 9,95942

Σε d=1′ d=6

Σε d = 0′,6 x=; $x=\frac{6*0,6}{1}=3,6\simeq 4$

$$\begin{array}{r} 9,95948 \\ -\quad 4 \\ \hline 9,95944 \end{array}$$

Άρα logσυν(24^0 22′,6)=9,95944

4. *lognμ(1⁰ 38′,7)=;*

Λύση:

d=1′

lognμ(1⁰ 38′) < lognμ(1⁰ 38′,7) < lognμ(1⁰ 39′)

d=0′,7

8,45489 ⟵ d=441 ⟶ 8,45930

d=1′
d=0′,7
d=441

Σε d=1′ d=441

Σε d=0′,7 x=;

$$x=\frac{441*0,7}{1}=308,7\simeq 309$$

8,45489
+ 309
8,45798

Άρα lognμ(1⁰ 38′,7)=8,45798

5. *logεφ(177⁰ 57′,5)=;*

Λύση:

d=1′

logεφ(177⁰ 57′) > logεφ(177⁰ 57′,5) > logεφ(177⁰ 58′)

d=0′,5

8,55382 ⟵ d=335 ⟶ 8,55027

d=1′
d=0′,5
d=335

Σε d=1′ d=335

Σε d=0′,5 x=;

$$x=\frac{335*0,5}{1}=167,5\simeq 168$$

8,55382
- 168
8,55214

- Επειδή βρισκόμαστε στο β' τεταρτημόριο (90⁰ - 180⁰) από τον logεφ(177⁰ 57′,0)=8,55382 αφαιρώ τον logεφ 0′,5 =168 και έχω:

logεφ(177⁰ 57′,5)=8,55214

6. *logστεμ(26⁰ 04′,4)=;*

Λύση:

d=1′

$\log\sigma\tau\varepsilon\mu(26^{0}04') > \log\sigma\tau\varepsilon\mu(26^{0}04',4) > \log\sigma\tau\varepsilon\mu(26^{0}05')$ d=1′

d=0′,4 d=0′,4

d=25 d=25

10,35712 ⟷ 10,35687

Σε d=1′ d=25

Σε d=0′,4 x=;

$$x=\frac{25*0,4}{1}=10,0$$

```
  10,35712
-       10
  10,35702
```

Άρα logστεμ(26⁰ 04′,4)=10,35702

7. *logσυν(138⁰ 17′,6)=;*

Λύση:

d=1′

$\log\sigma\upsilon\nu(138^{0}17') < \log\sigma\upsilon\nu(138^{0}17',6) < \log\sigma\upsilon\nu(138^{0}18')$ d=1′

d=0′,6 d=0′,6

d=11 d=11

9,87300 ⟷ 9,87311

Σε d=1′ d=11

Σε d=0′,6 x=;

$$x=\frac{11*0,6}{1}=6,6\simeq 7$$

```
  9,87300
+       7
  9,87307
```

- Επειδή βρισκόμαστε στο β' τεταρτημόριο τον logσυν0′,6=7 τον προσθέτουμε στον logσυν(138⁰ 17′,6)=9,87300

Άρα logσυν(138⁰ 17′,6)=9,87307

8. *logσυν(83⁰ 15′,3)=;*

<u>Λύση:</u>

d=1′

logσυν(83^0 15′) > logσυν(83^0 15′,3) > logσυν(83^0 16′)

d=0′,3

9,07018 ⟵ d=107 ⟶ 9,06911

d=1′

d=0′,3

d=107

Σε d=1′ d=107

Σε d=0′,3 x=;

$$x=\frac{107*0,3}{1}=32,1\simeq 32$$

	9,07018
-	32
	9,06986

Άρα logσυν(83^0 15′,3)=9,06986

9. *logημ(63⁰ 19′,8)=;*

<u>Λύση:</u>

d=1′

logημ(63^0 19′) < logημ($63^0$19′,8) < logημ(63^0 20′)

d=0′,8

9,95110 ⟵ d=6 ⟶ 9,95116

d=1′

d=0′,8

d=6

Σε d=1′ d=6

Σε d=0′,8 x=;

$$x=\frac{6*0,8}{1}=4,8\simeq 5$$

	9,95110
+	5
	9,95115

Άρα logημ(63^0 19′,8)=9,95115

10. *logσυν(30⁰ 17' 32")=;*

Λύση:

d=1' = 60"

logσυν(30⁰ 17')>logσυν(30⁰ 17' 32")>logσυν(30⁰ 18')   d=60"

d=32"   d=32"

9,93628 ⟷ (d=7) 9,93621   d=7

Σε d=60"   d=7

Σε d=32"   x=; $x=\frac{7*32}{60} \simeq 4$

$$\begin{array}{r} 9,93628 \\ - \quad 4 \\ \hline 9,93624 \end{array}$$

Άρα logσυν(30⁰17' 32")=9,93624

11. *logστεμ(31⁰ 35'41")=;*

Λύση:

d=1' = 60"

logστεμ(31⁰35') > logστεμ(31⁰35'41") > logστεμ(31⁰36')   d=60"

d=41"   d=41"

10,28089 ⟷ (d=21) 10,28068   d=21

Σε d=60"   d=21

Σε d=41"   x=; $x=\frac{21*41}{60} = 14,3 \simeq 14$

$$\begin{array}{r} 10,28089 \\ - \quad 14 \\ \hline 10,28075 \end{array}$$

Άρα logστεμ(31⁰ 35'41")=10,28075

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΔΟΘΕΝΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *logεφB=10,05799,* $\hat{B}$ =;

Λύση:

d=25

10,05778 < 10,05799 < 10,05803

d=21

48^0 48′ ←— d=1 —→ 48^0 49′

d=25

d=21

d=1′

Σε d=25 d=1

Σε d=21 x=; $x=\frac{21*1}{25}=0',84$

Άρα $\hat{B}=48^0\ 48',84$

2. *logημB=9,89833,* $\hat{B}$ =;

Λύση:

d=10

9,89830 < 9,89833 < 9,89840

d=3

52^0 18′ ←— d=1 —→ 52^0 19′

d=10

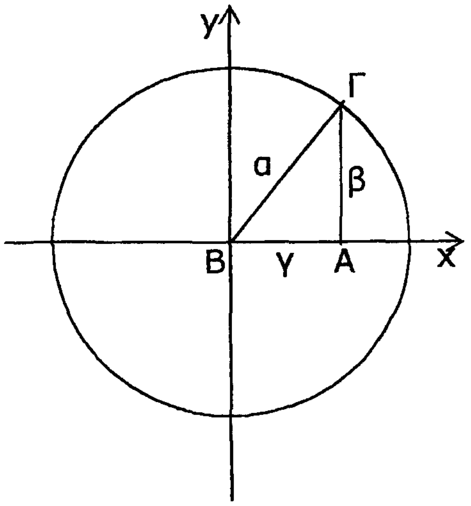
d=3

d=1

Σε d=10 d=1

Σε d=3 x=; $x=\frac{1*3}{10}=0,3$ Άρα $\hat{B}=52^0\ 18',3$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

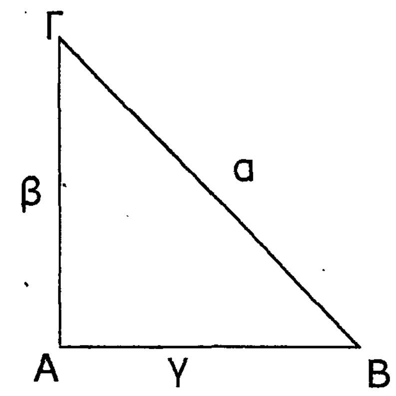


ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ: Διακρίνονται σε κύρια και δευτερεύοντα. **ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ** λέγονται τα μήκη των τριών πλευρών του α,β,γ και τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ. **ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ** λέγονται τα ύψη, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και άλλα στοιχεία του τριγώνου.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος.

- **ΤΟ ΗΜΙΤΟΝΟ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
- **ΤΟ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.
- **Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.
- **Η ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την απέναντι κάθετη πλευρά.
- **Η ΤΕΜΝΟΥΣΑ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της υποτείνουσας προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.
- **Η ΣΥΝΤΕΜΝΟΥΣΑ** οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της υποτείνουσας προς την απέναντι κάθετη πλευρά.



(1) ΗΜΙΤΟΝΟ: $ημB=\frac{β}{α} \Rightarrow β=α*ημB$

(2) ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ: $συνB=\frac{γ}{α} \Rightarrow γ=α*συνB$

(3) ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ: $εφB=\frac{β}{γ} \Rightarrow β=γ*εφB$

(4) ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ: $σφB=\frac{γ}{β} \Rightarrow γ=β*σφB$

(5) ΤΕΜΝΟΥΣΑ: $τεμνB=\frac{α}{γ} \Rightarrow α=γ*τεμνB$

(6) ΣΥΝΤΕΜΝΟΥΣΑ: $στεμB=\frac{α}{β} \Rightarrow α=β*στεμB$

(7) $εφB=\frac{ημB}{συνB}$

(8) $σφB=\frac{συνB}{ημB}$

(9) $τεμνB=\frac{1}{συνB}$

(10) $στεμB=\frac{1}{ημB}$

<u>ΥΠΟΜΝΗΣΗ:</u> Ξέρουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα $α^2=β^2+γ^2$.

Επίσης ισχύει: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{Γ}=180^0$ και $\hat{A}=90^0 \Rightarrow \hat{B}+\hat{Γ}=90^0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) *Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) ισχύουν οι σχέσεις.*

α) *σφ²Β=στεμ²Β-1*

Λύση:

$$σφ^2B=\frac{συν^2B}{ημ^2B}=\frac{1-ημ^2B}{ημ^2B}=\frac{1}{ημ^2B}-\frac{ημ^2B}{ημ^2B}=στεμ^2B-1$$

β) $συν^2Γ-ημ^2Γ=\frac{β^2-γ^2}{α^2}$

Λύση:

$$συν^2Γ\text{-}ημ^2Γ=\frac{β^2}{α^2}-\frac{γ^2}{α^2}=\frac{β^2-γ^2}{α^2}$$

γ) $\frac{2εφΓ}{1-εφ^2Γ}=\frac{2βγ}{β^2-γ^2}$

Λύση:

$$\frac{2εφΓ}{1-εφ^2Γ}=\frac{2\frac{γ}{β}}{1-\frac{γ^2}{β^2}}=\frac{2\frac{γ}{β}}{\frac{β^2-γ^2}{β^2}}=\frac{2γβ^{\not 2}}{\not β(β^2-γ^2)}=\frac{2βγ}{β^2-γ^2}$$

δ) $\frac{ημB+συνΓ}{ημΓ+συνB}=εφB$

Λύση:

$$\frac{ημB+συνΓ}{ημΓ+συνB}=\frac{\frac{β}{α}+\frac{β}{α}}{\frac{γ}{α}+\frac{γ}{α}}=\frac{\frac{2β}{α}}{\frac{2γ}{α}}=\frac{2αβ}{2αγ}=εφB$$

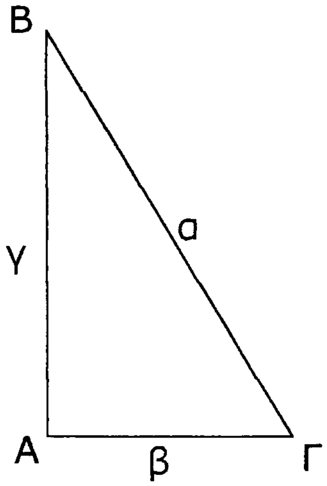
ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ο κυριότερος σκοπός της τριγωνομετρίας είναι η επίλυση τρίγωνων.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ονομάζουμε τον προσδιορισμό των μέτρων των στοιχείων του, που γίνεται υπολογισμό από δεδομένα αριθμητικά μεγέθη (μέτρα) στοιχείων του τρίγωνου που πρέπει να είναι αναγκαία και επαρκή. Βέβαια αυτό είναι δυνατό σε μερικές μόνο περιπτώσεις και από την Γεωμετρία. Η Γεωμετρία όμως σε πολλές περιπτώσεις βρίσκεται σε αδυναμία να επιλύσει τρίγωνο, διότι δεν υπάρχουν σχέσεις που να συνδέουν τα γραμμικά και τα γωνιακά στοιχεία ενός τριγώνου.

Η Τριγωνομετρία όμως με την εισαγωγή των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας εξασφαλίζει τις σχέσεις αυτές.

Στην επίλυση των ορθογωνίων τριγώνων διακρίνουμε τις παρακάτω κύριες περιπτώσεις:



1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ(Α=90°)του οποίου δίδονται η υποτείνουσα ΒΓ=α και μια οξεία γωνία του, έστω η γωνία Β.

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας Γ.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ,\ \hat{A}=90^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{B}$$

β) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς β

$\eta\mu B=\dfrac{\beta}{\alpha}\Rightarrow \beta=\alpha\cdot\eta\mu B$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

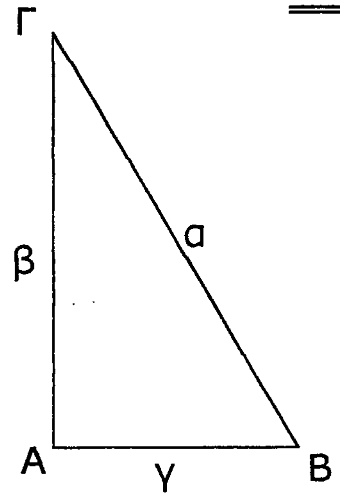
logβ=log(αημΒ) ⇒ logβ=logα + logημΒ

γ) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς γ

$\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow \gamma=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu B$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

logγ=log(ασυνΒ) ⇒ logγ=logα + logσυνΒ

1η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1ης περίπτωσης)



Έστω ότι μας δίνεται η υποτείνουσα α=358,7m και η οξεία γωνία Β=52° 18′ 20″ ενός ορθογωνίου τρίγωνου ΑΒΓ. Να υπολογιστούν η γωνία Γ και οι κάθετες πλευρές β και γ.

Λύση:

α) Υπολογισμός της οξείας γωνίας Γ

$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}$ = 89° 59′ 60″

- 52° 18′ 20″

37° 41′ 40″

Άρα: $\hat{\Gamma}$=37° 41′ 40″

β) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς β.

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ. 1 Λογαριθμίζω την σχέση 1

logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

logβ=log358,7+logημ(52° 18′ 20″) =2,55473+9,89833* ⇒

logβ=12,45306 ή logβ=2,45306** ⇒ β=283,8312m

* logημ(52° 18′) < logημ(52° 18′ 20″) < logημ(52° 19′)

9,89830 ← d=10 → 9,89840

+ 3

9,89833

Σε 1′= 60″ d=10

Σε 20″ x=; $x=\frac{10\cdot 20}{60}=3{,}333\simeq 3$

** 45301 < 45306 < 45317 (d=5, d=16)

2838 ← → 2839

+ 0,312

2838,312

Σε 16 1

Σε 5 x=; $x=\frac{1\cdot 5}{16}=0{,}312$

γ) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς γ

$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B$ [1] Λογαριθμίζω την [1]

$\log\gamma = \log(\alpha\sigma\upsilon\nu B) \Rightarrow \log\gamma = \log\alpha + \log\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 358{,}7 + \log\sigma\upsilon\nu(52° \; 18' \; 20'') = 2{,}55473 + 9{,}78636 \Rightarrow$

$\log\gamma = 12{,}34109(-10) \Rightarrow \log\gamma = 2{,}34109 \Rightarrow$ <u>γ=219,325</u>

* $\log\sigma\upsilon\nu(52° \; 18') > \log\sigma\upsilon\nu(52° \; 18' \; 20'') > \log\sigma\upsilon\nu(52° \; 19')$

↓ 9,78642 ←— d=17 —→ 9,78625 ↓

9,78642
\- 6
9,78636

Σε 1'= 60'' d=17

Σε 20'' x=; $x = \dfrac{17 \cdot 20}{60} \simeq 6$

d=20, d=5

* * 34104 < 34109 < 34124

2193 ←— d=1 —→ 2194

2193
\+ 025
219325

Σε d=20 1

Σε d=5 x=; $x = \dfrac{1 \cdot 5}{20} = 0{,}250$

Β' Τρόπος επίλυσης της 1ης εφαρμογής

Ο υπολογισμός των πλευρών β και γ μπορεί να γίνει και χωρίς την χρήση των λογαρίθμων αν χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες των φυσικών τριγωνομετρικών αριθμών. Δηλαδή για την ίδια εφαρμογή έχουμε:

α) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς β.

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = \alpha \cdot \eta\mu B \Rightarrow \beta = 358,7 \cdot \eta\mu(52^0 18' 20'') \Rightarrow$$

$$\beta = 358,7 * 0,79128 = 283,83 \text{m}$$

Άρα β=283,83 m

β) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς γ

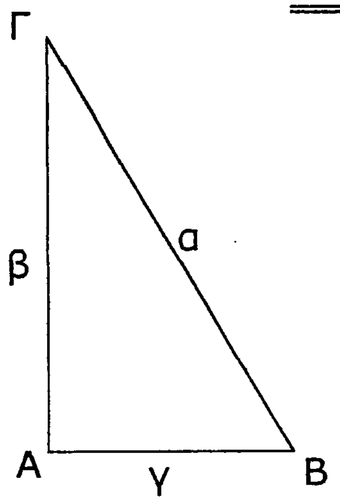
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B \Rightarrow \gamma = 358,7 \cdot \sigma\upsilon\nu(52^0 18' 20'') \Rightarrow$$

$$\gamma = 358,7 * 0,61145 \simeq 219,32$$

Άρα γ=219,32 m

Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι μεγαλύτερη προσέγγιση βρίσκουμε με την χρήση των λογαρίθμων και αυτόν τον τρόπο θα εφαρμόζουμε από εδώ και πέρα.

$2^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{ης}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η υποτείνουσα α=159,8m και η οξεία γωνία Β=32° 18΄,5. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

α) <u>Υπολογισμός της γωνίας Γ</u>

$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}=89^\circ\ 59'\ 60''$

$\quad -\ 32^\circ\ 18'\ 30''$

$\quad\ \ 57^\circ\ 41'\ 30''$

<u>Άρα: $\hat{\Gamma}=57^\circ\ 41'\ 30''$</u>

β) <u>Υπολογισμός της πλευράς β</u>.

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ. [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

logβ=log159,8+logημ(32° 18' 30") =2,20358+9,72793 ⇒

logβ=11,93151(-10) =1,93151 ⇒ <u>β=85,41 m</u>

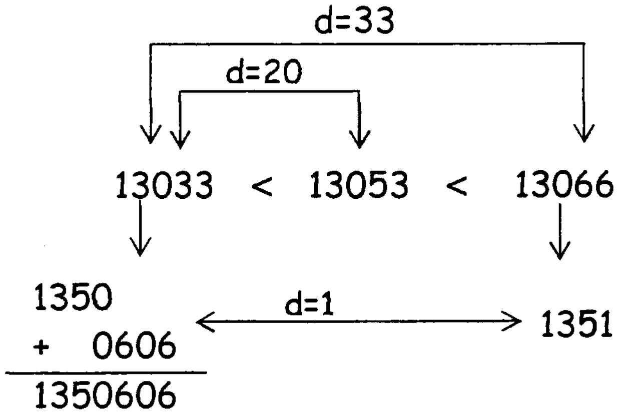
<u>γ) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς γ</u>

$συνB=\frac{γ}{α} \Rightarrow γ=α\cdot συνB$ [1] Λογαριθμίζω την [1]

logγ = log(ασυνΒ) ⇒ logγ = logα + logσυνΒ ⇒

logγ = log159,8 + logσυν(32° 18' 30")= 2,20358 + 9,92695 ⇒

logγ = 12,13053(-10) ⇒ logγ = 2,13053 ⇒ <u>γ=135,0606 m</u>



Σε d=33 1

Σε d=20 x=; $x=\frac{1\cdot 20}{33}\simeq 0,606$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ</u> (α' περίπτωση)

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζουμε:

α) α=13,85 m και $\hat{B}=38^0\ 35'\ 30''$

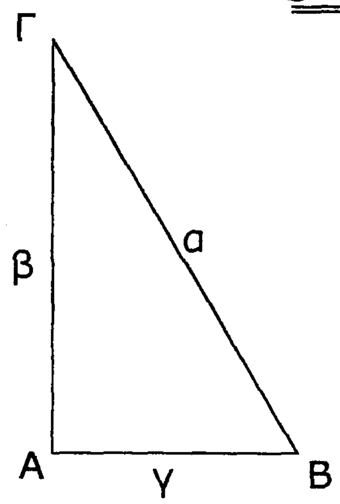
β) α=125,9 m και $\hat{B}=40^0\ 10'\ 05''$

γ) α=133,98 m και $\hat{B}=89^0\ 25'\ 18''$

δ) α=44,38 m και $\hat{B}=46^0\ 30'\ 20''$

ε) α=15,42 m και $\hat{B}=66^0\ 33'\ 38''$

$3^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{ης}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα α= 288,1 m και η γωνία Β=28° 28′ 28″. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου.

Λύση:

α) Εύρεση της γωνίας Γ

$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^0-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}$ = 89° 59′ 60″

- 28° 28′ 28″

61° 31′ 32″

Άρα: $\hat{\Gamma}$=61° 31′ 32″

β) Εύρεση της πλευράς β.

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ. [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

logβ=log288,1+logημ(28° 28′ 28″) = 2,45954+9,67831 ⇒ (* *)

logβ=12,13785(-10) ⇒ logβ=2,13785 (*) ⇒ β= 137,35625 m

* d=32, d=18

13767 < 13785 < 13799

1373 ← d=1 → 1374

1373
+ 05265
13735265

Σε 32 1

Σε 18 x=; $x=\frac{18 \cdot 1}{32}=0{,}5625$

* logημ(28° 28′) < logημ(28° 28′ 28″) < logημ(28° 29′)

9,67820 ← d=23 → 9,67843

9,67820
+ 11
9,67831

Σε 1′= 60″ 23 Σε 28″ x=; $x=\frac{28 \cdot 23}{60} \simeq 11$

γ) Εύρεση της πλευράς γ

$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B$ [1] Λογαριθμίζω την [1]

$\log\gamma = \log(\alpha\sigma\upsilon\nu B) \Rightarrow \log\gamma = \log\alpha + \log\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 288{,}1 + \log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ \overset{*}{2}8'\ 28'') = 2{,}45954 + 9{,}94401 \Rightarrow$

$\log\gamma = 12{,}40355\ (-10) \Rightarrow \log\gamma = 2{,}\overset{**}{40}355 \Rightarrow$ <u>γ=253,25 m</u>

$* \quad \log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ 28') > \log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ 28'\ 28'') > \log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ 29')$

$\log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ 28') \to 9{,}94404$, $\log\sigma\upsilon\nu(28^\circ\ 29') \to 9{,}94397$

$9{,}94404 \longleftarrow d=7 \longrightarrow 9{,}94397$

$$\begin{array}{r} 9{,}94404 \\ -\quad 3 \\ \hline 9{,}94401 \end{array}$$

Σε 1'= 60'' 7

Σε 28'' x=; $\quad x = \frac{7 \cdot 28}{60} \approx 3$

d=18 (from 40346 to 40364), d=9 (from 40346 to 40355)

$** \quad 40346 < 40355 < 40364$

$40346 \to 2532$, $40364 \to 2533$

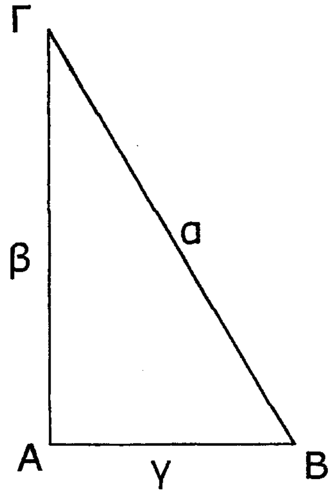
$2532 \longleftarrow d=1 \longrightarrow 2533$

$$\begin{array}{r} 2532 \\ +\quad 05 \\ \hline 25325 \end{array}$$

Σε 18 1

Σε 9 x=; $\quad x = \frac{9 \cdot 1}{18} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

4η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1ης περίπτωσης)



Δίνονται σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα α=4,25 m και η οξεία γωνία Β=38° 35΄. Να υπολογιστούν η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η κάθετη πλευρά β.

Λύση:

α) Εύρεση της γωνίας Γ

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \begin{array}{r} 89^\circ\ 60' \\ -\ 38^\circ\ 35' \\ \hline 51^\circ\ 25' \end{array}$$

Άρα: $\hat{\Gamma} = 51^\circ\ 25'$

β) Εύρεση της πλευράς β.

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ (1) Λογαριθμίζω την σχέση (1)

logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

logβ=log4,25+logημ(38° 35΄) = 0,62839 + 9,79494 ⇒

logβ=10,42333 (-10) ⇒ logβ= 0,42333 ⇒ β=2,6505 m

d=16

d=8

42325 < 42333 < 42341

↓ ↓

2650 ⟵ d=1 ⟶ 2651

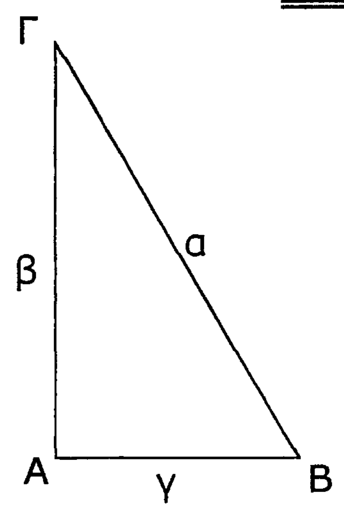
+ 05

26505

Σε 16 1

Σε 8 x=; $x = \frac{8}{16} = 0,5$

$5^η$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{ης}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η οξεία γωνία $B=38^o\ 35'$ και η υποτείνουσα $α=13,85$ m. Να υπολογιστεί η κάθετη πλευρά β.
(ΘΕΜΑ εξετάσεων Φεβρουάριος 2002)

Λύση:

$ημB=β/α \Rightarrow β = α \cdot ημB.$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log β=\log(α \cdot ημB) \Rightarrow \log β=\log α+\log ημB \Rightarrow$

$\log β=\log 13,85 + \log ημ(38^o\ 35') = 1,14145 + 9,79494 \Rightarrow$

$\log β=10,93639 \Rightarrow \log β= 0,93639^{*}\ (+10) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>β=8,6376 m</u>

* Παρεμβολή

d=5, d=3

0,93636 < 0,93639 < 0,93641

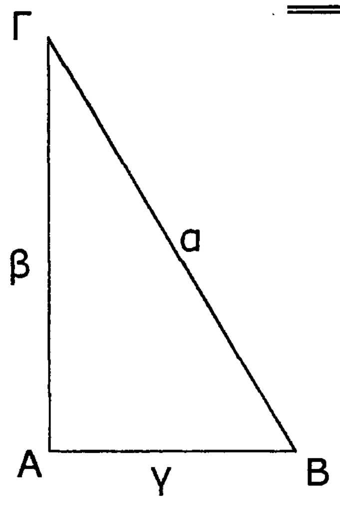
8637 ← d=1 → 8638

Σε d=5 1

Σε d=3 x=; $x=\frac{1 \cdot 3}{5}=0,6$

Άρα 8637
+ 0,6
86376

$6^η$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{ης}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζουμε οτι η υποτείνουσα α=159,8 m και η οξεία γωνία Β=42° 18',5. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου ΑΒΓ. (ΘΕΜΑ εξετάσεων Ιούνιος 2002)

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}=89^\circ\ 59'\ 60''$

$$\begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 42^\circ\ 18'\ 30'' \\ \hline 47^\circ\ 41'\ 30'' \end{array}$$

Άρα: $\hat{\Gamma}=47^\circ\ 41'\ 30''$

β) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς β.

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ. [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

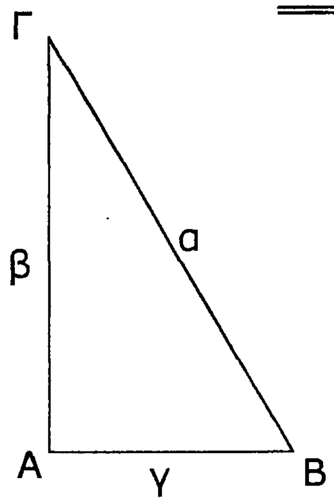
logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

logβ=log159,8+logημ(42° 18',5) = 2,20358 + 9,82809 ⇒ (*)

logβ=12,03167 ή logβ=2,03167 ⇒ (* *)

β= 107,56 m

7^{η} ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{\eta\varsigma}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο δίδονται η υποτείνουσα α= 28,81 m και η γωνία Β=28° 28′ 30″. Να υπολογιστούν η γωνία Γ και η κάθετη πλευρά γ.
(ΘΕΜΑ εξετάσεων Μαρτίου 2003)

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{B}+\hat{\Gamma} = 90^{\circ} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^{\circ} - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 89^{\circ}\ 59'\ 60''$$

	89° 59′ 60″
−	28° 28′ 30″
	61° 31′ 30″

Άρα: $\hat{\Gamma} = 61^{\circ}\ 31'\ 30''$

γ) Υπολογισμός της κάθετης πλευράς γ

$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\gamma = \log(\alpha\sigma\upsilon\nu B) \Rightarrow \log\gamma = \log\alpha + \log\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 28{,}81 + \log\sigma\upsilon\nu(28^{\circ}\ 28'\ 30'') = 1{,}45954 + 9{,}94400 \Rightarrow$

$\log\gamma = 11{,}40354$ ή $\log\gamma = 1{,}40354 \Rightarrow$ <u>γ=25,32444 m</u> (*)

d=18

d=8

* 40346 < 40354 < 40364

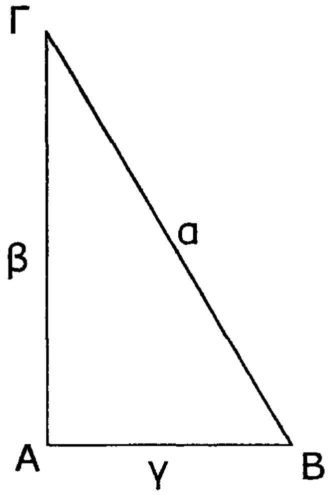
2532 ⟵ d=1 ⟶ 2533

	2532
+	0444
	2532444

Σε 18 1

Σε 8 x=; $x = \dfrac{8 \cdot 1}{18} = \dfrac{4}{9} = 0{,}444$

8η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1ης περίπτωσης)



Έστω ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η υποτείνουσα α=28,81 m και η γωνία Β=28° 28′ 30″. Να υπολογιστεί η κάθετη πλευρά β.
(Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2003-Μεταφορείς)

Λύση:

ημΒ=β/α $\Rightarrow$ β =α·ημΒ. [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

logβ=log(α·ημΒ) $\Rightarrow$ logβ=logα+logημΒ $\Rightarrow$

logβ=log28,81 + logημ(28° 28' 30'') = 1,45954 + 9,67832 $\Rightarrow$

logβ=11,13786 ή logβ= 1,13786* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ β=13,7359 m

* d=32, d=19

13767 < 13786 < 13799

1373 ← d=1 → 1374

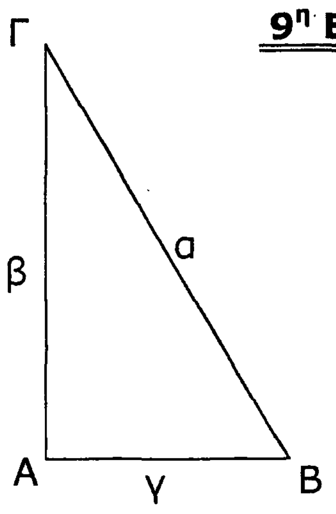
\+ 059

137359

Σε 32 1

Σε 19 x=; $x = \frac{1 \cdot 19}{32} \simeq 0,59$

$9^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{ης}$ περίπτωσης)



Έστω ότι μας δίνεται η υποτείνουσα α=338,7 m και η οξεία γωνία Β=52° 18′ 20″ ενός ορθογωνίου τριγώνου. Να υπολογιστεί η κάθετη πλευρά β.
(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2003)

Λύση:

ημΒ=β/α ⇒ β =α·ημΒ. | 1 | Λογαριθμίζω την σχέση | 1 |

logβ=log(α·ημΒ) ⇒ logβ=logα+logημΒ ⇒

* *

logβ=log338,7+logημ(52° 18′ 20″) = 2,52982 + 9,89833 ⇒

*

logβ=12,42815 (-10) ⇒ logβ=2,42815 ⇒ <u>β= 268,011 m</u>

* παρεμβολή:

d=17

d=2

42813 < 42815 < 42830

↓ ↓

2680 ←— d=1 —→ 2681

\+ 0,11

268011

Σε 17 1

Σε 2 x=; $x = \frac{2 \cdot 1}{17} = 0,11$

* * παρεμβολή:

logημ(52° 18′) < logημ(52° 18′ 20″) < logημ(52° 19′)

↓ ↓

9,89830 ←— d=10 —→ 9,89840

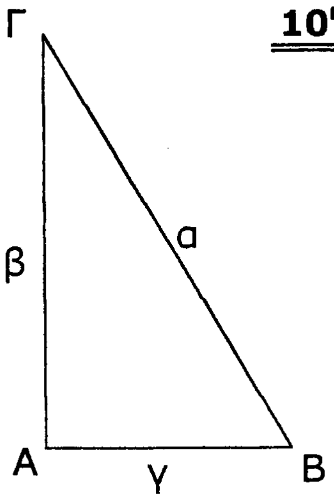
\+ 3

9,89833

Σε 60″ 10

Σε 20″ x=; $x = \frac{10 \cdot 20}{60} \approx 3,33 \approx 3$

10^{η} ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($1^{\eta\varsigma}$ περίπτωσης)



Έστω ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίδονται η οξεία γωνία Β=38° 35′ 30″ και η υποτείνουσα α= 13,85 m. Να υπολογιστεί η κάθετη πλευρά γ.
(ΘΕΜΑ εξετάσεων Φεβρουαρίου 2003)

Λύση:

$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\gamma = \log(\alpha\sigma\upsilon\nu B) \Rightarrow \log\gamma = \log\alpha + \log\sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 13{,}85 + \log\sigma\upsilon\nu(38^\circ\ 35'\ 30'') = 1{,}14145 + 9{,}89299 \Rightarrow$

$\log\gamma = 11{,}03444\ (-10)$ ή $\log\gamma = 1{,}03\overset{*}{4}44$

Άρα $\underline{\gamma = 10{,}82525\ m}$

* παρεμβολή

d=40
d=21

03423 < 03444 < 03463

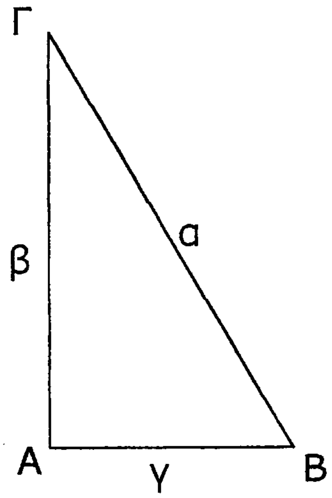
1082 —— d=1 ——> 1083

\+ 0525

1082525

Σε d=40 d=1

Σε d=21 x=; $x = \dfrac{1 \cdot 21}{40} = 0{,}525$



$2^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίδεται μια οξεία γωνία του έστω η $\hat{B}$ και μια κάθετη πλευρά του έστω η β.

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

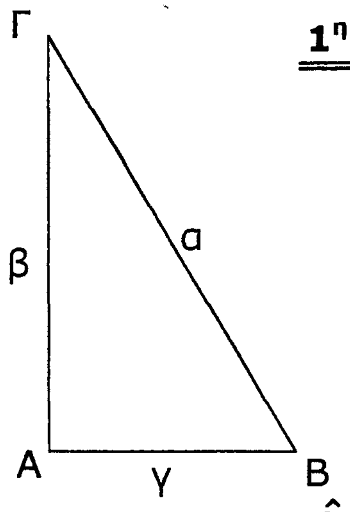
α) $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^0-\hat{B}$

β) $\text{στεμ}B=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow \alpha=\beta\cdot\text{στεμ}B$

γ) $\text{εφ}\Gamma=\frac{\gamma}{\beta}\Rightarrow \gamma=\beta\cdot\text{εφ}\Gamma$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Προτιμούμε με την χρήση του τύπου $\text{στεμ}B=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow \alpha=\beta\cdot\text{στεμ}B$, διότι ο τύπος $\text{ημ}B=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow \alpha=\frac{\beta}{\text{ημ}B}$ μας οδηγεί σε αφαίρεση: logα = logβ - logημB. Επίσης παίρνουμε τον τύπο $\text{εφ}\Gamma=\frac{\gamma}{\beta}$ αντί του $\text{ημ}\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}$ γιατί α) η υποτείνουσα δεν δίνεται, αλλά υπολογίζεται. Κατά συνέπεια θα έχουμε προκαταβολικά ένα λάθος προσέγγισης στην τιμή της πλευράς α και β) διότι ο τύπος γ= βεφΓ δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια, επειδή η εφαπτομένη μεταβάλεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$ ενώ το ημίτονο έχει πολύ στενά περιθώρια, από το -1 έως το +1.



$1^η$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($2^{ης}$ περίπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίδονται η κάθετη πλευρά β=108,75m και η οξεία γωνία Β=28° 28′ 28″.

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \begin{array}{r} 89^o\ 59'\ 60'' \\ -\ 28^o\ 28'\ 28'' \\ \hline 61^o\ 31'\ 32'' \end{array}$$

Άρα: $\hat{\Gamma}$=61° 31' 32"

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B \quad \boxed{1}$$ Λογαριθμίζω την σχέση $\boxed{1}$

$$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$$

$$\log\alpha = \log 108{,}75 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(28^o\ \overset{*}{28'}\ 28'') \Rightarrow$$

$$\log\alpha = 2{,}03643 + 10{,}32169 = 12{,}35812\ (-10) \Rightarrow$$

$$\log\alpha = 2{,}35812 \Rightarrow \underline{\alpha = 228{,}095}\ m$$

* παρεμβολή:

$$\log\sigma\tau\varepsilon\mu(28^o\ 28') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(28^o\ 28'\ 28'') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(28^o\ 29')$$

$$\begin{array}{r} 10{,}32180 \\ -\quad 11 \\ \hline 10{,}32169 \end{array} \quad \xleftrightarrow{\quad d=23 \quad} \quad 10{,}32157$$

Σε 1'=60'' d=23

Σε 28'' x=; $x = \dfrac{23 \cdot 28}{60} \simeq 11$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \gamma = \beta\varepsilon\varphi\Gamma \quad \boxed{1}$$ Λογαριθμίζω την σχέση $\boxed{1}$

$\log\gamma = \log(\beta\varepsilon\varphi\Gamma) \Rightarrow \log\gamma = \log\beta + \log\varepsilon\varphi\Gamma \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 108{,}75 + \log\varepsilon\varphi(61^\circ\ 31'\ 32'') \Rightarrow$ *

$\log\gamma = 2{,}03643 + 10{,}26570 = 12{,}30213\ (-10) \Rightarrow$

$\log\gamma = 2{,}30213 \Rightarrow \underline{\gamma \simeq 200{,}5}$

* * παρεμβολή:

d=1'=60''

$\log\varepsilon\varphi(61^\circ\ 31') < \log\varepsilon\varphi(61^\circ\ 31'\ 32'') < \log\varepsilon\varphi(61^\circ\ 32')$

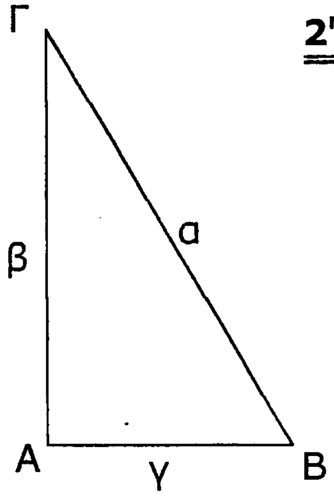
d=32''

10,26554 ⟷ (d=30) ⟷ 10,26584

10,26554
\- 16
10,26570

Σε 1'=60'' d=30

Σε 32'' x=; , $x = \frac{30 \cdot 32}{60} = 16$



<u>2η ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> (2ης περίπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίδονται η κάθετη πλευρά β=1592,8m και η οξεία γωνία Β=63°.

<u>Λύση:</u>

α) <u>Υπολογισμός της γωνίας Γ</u>

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^0 - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^0 - 63^0 = 27^0$$

<u>Άρα: $\hat{\Gamma} = 27^0$</u>

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$

* *

$\log\alpha = \log 1592{,}8 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(63°) \Rightarrow$

$\log\alpha = 3{,}20216 + 10{,}05012 = 13{,}25228 \Rightarrow$

*

$\log\alpha = 3{,}25228\ (-10)$ Άρα <u>α= 1787,64 m</u>

* παρεμβολή:

d=25

d=16

25212 < 25228 < 25237

1787 ←— d=1 —→ 1788

+ 064

178764

Σε d=25 d=1

Σε d=16 x=; $x = \frac{16 \cdot 1}{25} = 0{,}64$

* * παρεμβολή:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Log}1592 & < & \text{log}1592{,}8 & < & \text{log}1593 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 20194 & \xleftrightarrow{d=28} & & & 20222 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20194 \\ +\ \ 22 \\ \hline 20216 \end{array}$$

Σε 1 28

Σε 0,8 x=; , $x = \frac{28 \cdot 0{,}8}{1} \simeq 22$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \gamma = \beta\varepsilon\varphi\Gamma \quad \boxed{1}$ Λογαριθμίζω την σχέση $\boxed{1}$

$\log\gamma = \log(\beta\varepsilon\varphi\Gamma) \Rightarrow \log\gamma = \log\beta + \log\varepsilon\varphi\Gamma \Rightarrow$

$\log\gamma = \log1592{,}8 + \log\varepsilon\varphi(27^\circ) \Rightarrow$

$\log\gamma = 3{,}20216 + 9{,}70717 = 12{,}90933 \Rightarrow$

$\log\gamma = 2{,}90933\ (-10) \Rightarrow$ $\underline{\gamma \simeq 811{,}6\text{ m}}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ</u> (β' περίπτωση)

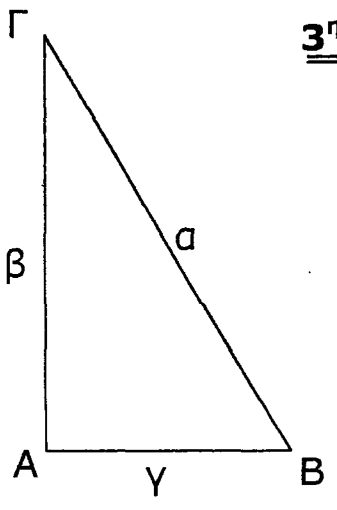
Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε ότι:

α) β=56,70 m και $\hat{B} = 57^0\ 42'$

β) β=9,45 m και $\hat{B} = 56^0\ 20'$

γ) β=1998,12 m και $\hat{B} = 84^0\ 10'\ 30''$

δ) β=218,32 m και $\hat{B} = 30^0\ 18'\ 12''$



3η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (2ης περίπτωσης)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι η οξεία γωνία $\hat{B}$=42° 16' και η κάθετη πλευρά β=35,60 m. Να υπολογισθούν τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία του ΑΒΓ.

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}=89^\circ\,60' - 42^\circ\,16' = 47^\circ\,44'$$

Άρα: $\hat{\Gamma}$=47° 44'

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$\sigma\tau\varepsilon\mu B=\dfrac{\alpha}{\beta}\Rightarrow \alpha=\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

logα = log(βστεμΒ) ⇒ logα = logβ + logστεμΒ ⇒

logα = log35,60 + logστεμ(42° 16') ⇒

logα = 1,55145 + 10,17225 =11,72370 ⇒

logα = 1,72370(-10)   Άρα α ≃ 52,93m

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{\gamma}{\beta}\Rightarrow \gamma=\beta\varepsilon\varphi\Gamma$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

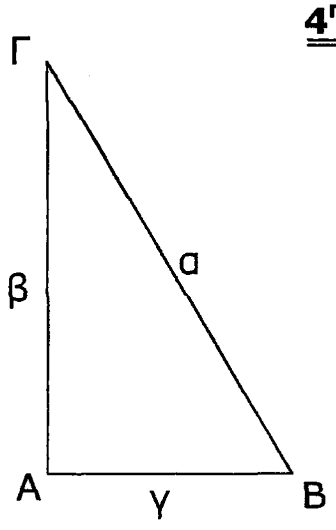
logγ = log(βεφΓ) ⇒ logγ = logβ + logεφΓ ⇒

logγ = log35,60 + logεφ(47° 44') ⇒

logγ = 1,55145 + 10,04150 =11,59295 ⇒

logγ = 1,59295 (-10) Άρα γ≃ 39,17 m

4^{η} ΕΦΑΡΜΟΓΗ (2^{ης} περίπτωσης)



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι η οξεία γωνία $\hat{B}=57^{o}\ 42'$ και η κάθετη πλευρά β=56,7 m. Να υπολογισθεί η υποτείνουσα α. (ΘΕΜΑ εξετάσεων Φεβρουαρίου 2002)

Λύση:

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ $\boxed{1}$ Λογαριθμίζω την σχέση $\boxed{1}$

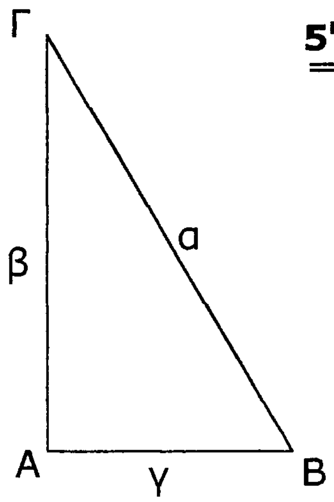
$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$

$\log\alpha = \log 56{,}7 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(57^{\circ}\ 42') \Rightarrow$

$\log\alpha = 1{,}75358 + 10{,}07301 = 11{,}82659 \Rightarrow$

$\log\alpha = 1{,}82659\ (+10)$

Άρα $\alpha = 67{,}08$ m



5η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (2ης περίπτωσης)

Έστω ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο δίδονται η οξεία γωνία Β=31° 35′ 41″ και η κάθετη πλευρά του β=46,5m. Να υπολογισθεί η υποτείνουσα α του τριγώνου ΑΒΓ.
(Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2003)

Λύση:

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$

$\log\alpha = \log 46{,}5 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(\overset{*}{31°}\ 35'\ 41'') \Rightarrow$

$\log\alpha = 1{,}66745 + 10{,}28075 = 11{,}94820 \Rightarrow$

$\log\alpha = \overset{**}{1{,}94820}$ Άρα $\underline{\alpha = 88{,}765\ m}$

* παρεμβολή:

d=1'=60''

$\log\sigma\tau\varepsilon\mu(31°\ 35') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(31°\ 35'\ 41'') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(31°\ 36')$

d=41''

10,28089 ←— d=21 —→ 10,28068

10,28089
\- 14
10,28075

Σε 1'=60'' d=21

Σε 41'' x=; $x = \frac{21 \cdot 41}{60} \simeq 14$

* * παρεμβολή:

d=5

d=3

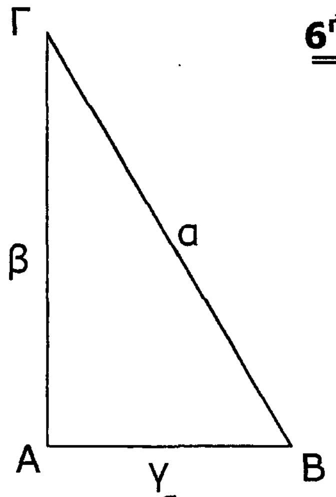
94817 < 94820 < 94822

8875 ←— d=1 —→ 8876

8875
\+ 06
88756

Σε d=5 d=1

Σε d=3 x=; $x = \frac{3 \cdot 1}{5} = 0.6$



$6^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($2^{ης}$ περίπτωσης)

Έστω ότι μας δίνεται η κάθετη πλευρά του β=108,75 m και η οξεία γωνία Β=38° 38′ 38″ ενός ορθογωνίου τριγώνου. Να υπολογισθεί η υποτείνουσα του α.

Λύση:

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \dfrac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$

$\log\alpha = \log 108{,}75 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(\overset{*}{3}8^\circ\, 38'\, 38'') \Rightarrow$

$\log\alpha = 2{,}03643 + 10{,}20448 = 12{,}24091 \Rightarrow$

$\log\alpha = \overset{**}{2{,}24091}$ Άρα <u>α= 174,144 m</u>

* παρεμβολή:

$\log\sigma\tau\varepsilon\mu(38^\circ\, 38') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(38^\circ\, 38'\, 38'') < \log\sigma\tau\varepsilon\mu(38^\circ\, 39')$

↓ 10,20458 ←— d=16 —→ 10,20442 ↓

10,20458
\- 10
10,20448

Σε 1'=60'' d=16

Σε 38'' x=; $x = \dfrac{16 \cdot 38}{60} = \dfrac{152}{15} \simeq 10$

* * παρεμβολή:

d=25 (24080 — 24105), d=11 (24080 — 24091)

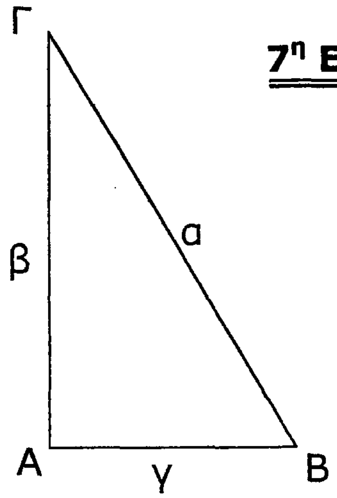
24080 < 24091 < 24105

↓ 1741 ←— d=1 —→ 1742 ↓

1741
\+ 045
174145

Σε d=25 d=1

Σε d=11 x=; $x = \dfrac{1 \cdot 11}{25} = 044$



$7^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($2^{ης}$ περίπτωσης)

Έστω οτι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίδονται η οξεία γωνία Β=31° 35′ 41″ και η κάθετη πλευρά β=46,5 m. Να υπολογισθεί η κάθετη πλευρά γ.
(Θέμα εξετάσεων Φεβρουάριος 2003 - μεταφορείς)

Λύση:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^{o} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^{o} - \hat{B} \Rightarrow$

$\hat{\Gamma} = 89^{o}\,59'\,60'' - 31^{o}\,35'\,41'' = 58^{o}\,24'\,19''$

Άρα: $\hat{\Gamma} = 58^{o}\,24'\,19''$

$εφΓ = \frac{γ}{β} \Rightarrow γ = β εφΓ$ (1) Λογαριθμίζω την σχέση (1)

$\log γ = \log(β εφΓ) \Rightarrow \log γ = \log β + \log εφΓ \Rightarrow$
*

$\log γ = \log 46{,}5 + \log εφ(58^{o}\,24'\,19'') \Rightarrow$

$\log γ = 1{,}66745 + 10{,}21107 = 11{,}87852 \Rightarrow$

$\log γ = 1{,}87852$ Άρα γ = 75,60 m
*

d=1'=60''

logεφ(58° 24′) < logεφ(58° 24′ 19″) < logεφ(58° 25′)

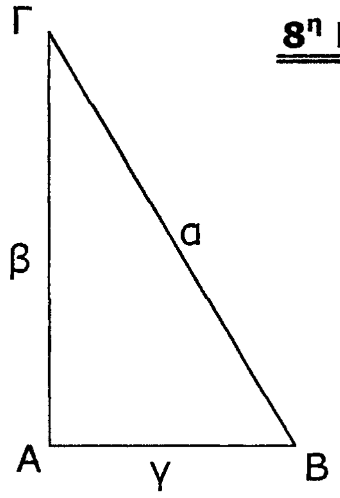
d=19''

10,21098 ⟵ d=28 ⟶ 10,21126

  10,21098
\+   9
  10,21107

Σε 60'' 28

Σε 19'' x=; $x = \frac{28 \cdot 19}{60} = 8{,}866 \simeq 9$



$8^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ($2^{ης}$ περίπτωσης)

Έστω σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μας δίνεται η οξεία γωνία Β=27° 02′ 06″ και η κάθετη πλευρά του β=0,75m. Να υπολογισθεί η υποτείνουσα α του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

$\sigma\tau\epsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu B$ [1] Λογαριθμίζω την σχέση [1]

$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\epsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\epsilon\mu B \Rightarrow$

$\log\alpha = \log 0{,}75 + \log\sigma\tau\epsilon\mu(\overset{*}{27}° 2' 6'') \Rightarrow$

$\log\alpha = \bar{1},87506 + 10{,}34243 = 9{,}87506(-10) + 10{,}34243 \Rightarrow$

$\log\alpha = 20{,}21749(-10) = 10{,}21749 = 0{,}\overset{**}{21749}$ Άρα <u>α=1,65m</u>

* παρεμβολή:

$\log\sigma\tau\epsilon\mu(27° 02') < \log\sigma\tau\epsilon\mu(27° 2' 6'') < \log\sigma\tau\epsilon\mu(27° 3')$

↓ 10,34246 ... ↓ 10,34221

$$\begin{array}{r} 10{,}34246 \\ -\quad 3 \\ \hline 10{,}34243 \end{array}$$

Σε d=60'' d=25

Σε d=06'' x=; $x = \frac{25 \cdot 06}{60} = 2{,}5 \simeq 3$

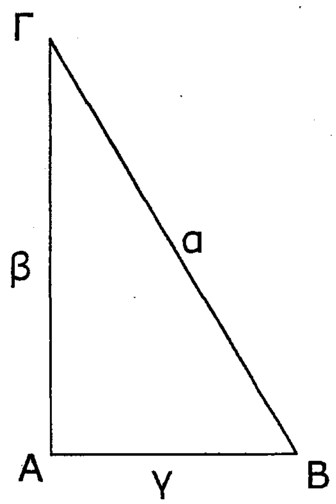
* * παρεμβολή: 21748 < 21749 < 21775

↓ 1650 ... ↓ 1651

$$\begin{array}{r} 1650 \\ +\ 0037 \\ \hline 1650037 \end{array}$$

Σε 27 1

Σε 1 x=; $x = \frac{1 \cdot 1}{27} = 0{,}037$



3^{η} ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίδονται οι δυο κάθετες πλευρές του β και γ.

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας Β.

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log\varepsilon\varphi B = \log\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \log\varepsilon\varphi B = \log\beta - \log\gamma$

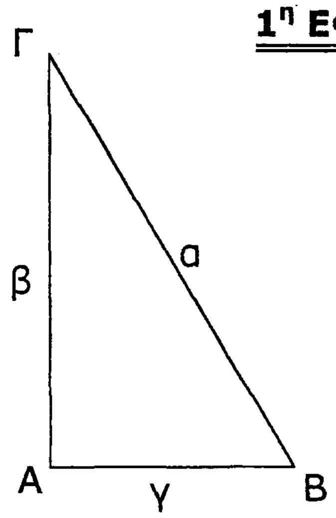
β) Υπολογισμός της πλευράς α

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log\alpha = \log(\beta\sigma\tau\varepsilon\mu B) \Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\sigma\tau\varepsilon\mu B$

γ) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$, $(\hat{A} = 90^0) \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^0 - \hat{B}$



1η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (3ης Περίπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίδονται οι δυο κάθετες πλευρές του β=888,80 m και γ=777,70 m.

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας Β.

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

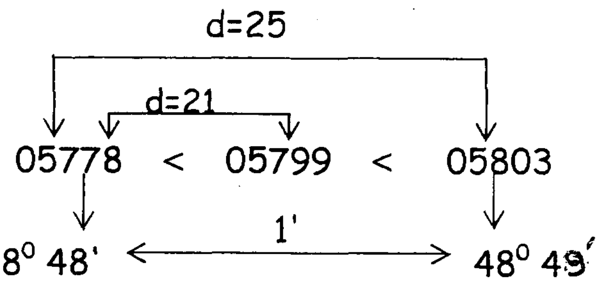
$\log\varepsilon\varphi B = \log\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \log\varepsilon\varphi B = \log\beta - \log\gamma \Rightarrow$

$\log\varepsilon\varphi B = \log 888{,}80 - \log 777{,}70 = 2{,}94880 - 2{,}89081 \Rightarrow$

$\log\varepsilon\varphi B = 0{,}05799\ (+10) \Rightarrow$

$\log\varepsilon\varphi B = 10{,}05799^{*} \Rightarrow \quad \hat{B} = 48^0\, 48'\, 50''$

* παρεμβολή:



$$\begin{array}{r} 48^0\, 48' \\ +\quad 0{,}84 \\ \hline 48^0\, 48',84 \end{array}$$

Σε 25 1'

Σε 21 x=; $x = \frac{21 \cdot 1}{25} = 0',84$

ή

Σε 1' 60''

Σε 0',84 x=; $x = \frac{60 \cdot 0{,}8}{1} = 50''$

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^0-\hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}=89^\circ\,59'\,60''$$

$$\begin{array}{r} -\;48^\circ\;48'\;50'' \\ \hline 41^\circ\;11'\;10'' \end{array}$$

Άρα: $\hat{\Gamma}=41^\circ\ 11'\ 10''$

γ) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\sigma\tau\varepsilon\mu B=\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha=\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B \quad (1)$$ Λογαριθμίζω την (1) και έχω

logα=log(βστεμB) $\Rightarrow$ logα=logβ + logστεμB $\Rightarrow$

logα=log888,80 + logστεμ(48° 48' 50") $\Rightarrow$

logα= 2,94880 + 10,12345 $\Rightarrow$

logα= 13,07225(-10) $\Rightarrow$

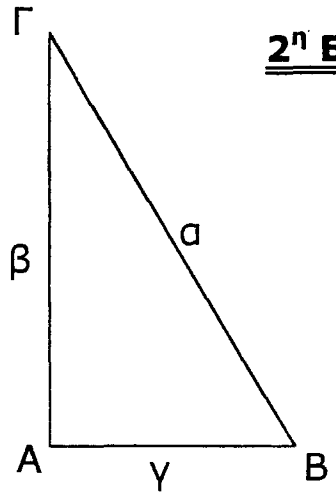
logα= 3,07225 Άρα α= 1181 m

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (3ης περιπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζουμε ότι:

α) β=152,4 m και γ= 90,4 m

β) β=64,73 m και γ= 82,06 m



<u>2η ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> (3ης Περίπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίδονται οι δυο κάθετες πλευρές του β=46,50 m και γ=75,60 m.

<u>Λύση:</u>

α)Υπολογισμός της γωνίας Β.

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log\varepsilon\varphi B=\log\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \log\varepsilon\varphi B=\log\beta - \log\gamma \Rightarrow$

$\log\varepsilon\varphi B=\log 46{,}50 - \log 75{,}60= 1{,}66745 - 1{,}87852 \Rightarrow$

$= 11{,}66745(-10) - 1{,}87852 \Rightarrow$

$\log\varepsilon\varphi B= 9{,}78893\ (-10)^{*} \Rightarrow$ <u>$\hat{B} = 31^0\ 35'\ 41''$</u>

* παρεμβολή:

d=28

d=19

9,78874 < 9,78893 < 9,78902

$31^0\ 35'$ ⟵ 1' ⟶ $31^0\ 36'$

\+ 0,67'

$31^0\ 35',679$

Σε 28 1'

Σε 19 x=; $x = \frac{19}{28} \simeq 0',679$

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^0 - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma}$ = 89° 59′ 60″

- 31° 35′ 41″

58° 24′ 19″

Άρα: $\hat{\Gamma}$ = 58° 24′ 19″

γ) Υπολογισμός της πλευράς α

$\sigma\tau\varepsilon\mu B = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu B$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

logα=log(βστεμΒ) ⇒ logα=logβ + logστεμΒ ⇒

logα=log46,50 + logστεμ(31° 35′ 41″) ⇒

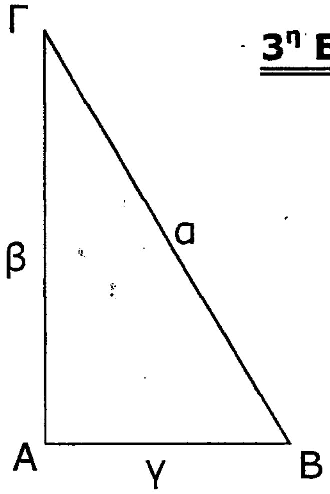
logα= 1,66745 + 10,28075 ⇒

logα= 11,94820 ⇒

logα= 1,94820 (-10) Άρα α= 88,76 m

ΑΣΚΗΣΗ: Ομοίως να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίδονται οι δύο πλευρές β=128m και γ=172m.

(Απ: $\hat{B} \approx 36^0$ 39′,4, $\hat{\Gamma} = 53^0$ 20′,6 και α=214,42m)



$3^η$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (3ης Περίπτωσης)

Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζουμε ότι οι δύο κάθετες πλευρές είναι β=152,4 m και γ=90,4 m.
(ΘΕΜΑ εξετάσεων Ιουνίου 2003)

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Β.

$εφB = \frac{β}{γ}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log εφB = \log\frac{β}{γ} \Rightarrow \log εφB = \log β - \log γ \Rightarrow$

$\log εφB = \log 152,4 - \log 90,4 = 2,18298 - 1,95617 \Rightarrow$

$\log εφB = 0,22681 (+10) = 10,22681^{*} \Rightarrow$ $\hat{B} \simeq 59^0\ 19',27''$

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{B} + \hat{Γ} = 90^0 \Rightarrow \hat{Γ} = 90^0 - \hat{B} \Rightarrow \hat{Γ} = 89^0\ 60',00 - 59^0\ 19',27'' = 30^0\ 40',33''$

Άρα: $\hat{Γ} = 30^0\ 40',33'$

γ) Υπολογισμός της υποτείνουσας α

$στεμB = \frac{α}{β} \Rightarrow α = β \cdot στεμB$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

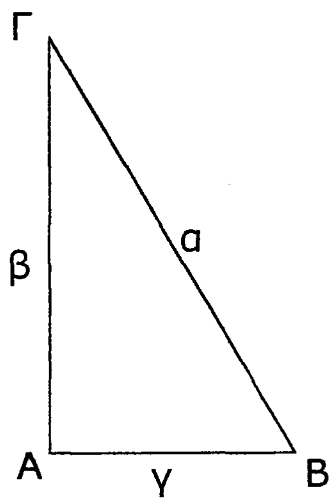
$\log α = \log(β στεμB) \Rightarrow \log α = \log β + \log στεμB \Rightarrow$

$\log α = \log 152,4 + \log στεμ(59^0\ 19',27'') \Rightarrow$

$\log α = 2,18298 + 10,06547 \Rightarrow \log α = 12,24845$

$\Rightarrow \log α = \overset{**}{2},24845$ και α= 177,09m

$4^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ



Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίδονται η υποτείνουσα α και μια κάθετη πλευρά, έστω η πλευρά β.

Λύση:

α) Υπολογισμός της γωνίας Β.

$ημB = \frac{β}{α}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log ημB = \log\frac{β}{α} \Rightarrow \log ημB = \log β - \log α \Rightarrow$

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^0$, $(\hat{A} = 90^0) \Rightarrow \hat{B} + \hat{Γ} = 90^0 \Rightarrow \hat{Γ} = 90^0 - \hat{B}$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$εφΓ = \frac{γ}{β} \Rightarrow γ = β \cdot εφΓ$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log γ = \log(β εφΓ) \Rightarrow \log γ = \log β + \log εφΓ \Rightarrow$

$1^{η}$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (4ης Περίπτωσης)

Έστω ότι δίνεται η υποτείνουσα (ορθ. τριγώνου) α=358,70m και η κάθετη πλευρά β=283,83 m.

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας $\hat{B}$.

$ημB = \frac{β}{α}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$logημB = log\frac{β}{α} \Rightarrow logημB = logβ - logα \Rightarrow$

$logημB = log28\overset{*}{3},83 - log358,70 = 2,45306 - 2,55473 \Rightarrow$

$logημB = 12,45306(+10) - 2,55473 = 9,\overset{**}{8}9833 \Rightarrow$

$\hat{B} = 52^0\ 18',3$ ή $\hat{B} = 52^0\ 18'\ 18''$

* παρεμβολή:

d=1

d=0,3

2838 < 2838,3 < 2839

45301 ⟵ 16 ⟶ 45317

+ 5

45306

Σε 1 16

Σε 0,3 x=; $x = \frac{16 \times 0,3}{1} = 4,8 \simeq 5$

** παρεμβολή:

d=10

d=3

9,89830 < 9,89833 < 9,89840

$52^0\ 18'$ ⟵ 1 ⟶ $52^0\ 19'$

+ 0,3

$52^0\ 18',3$

Σε d=10 1'

Σε d=3 x=; $x = \frac{1 \times 3}{10} = 0,3$

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 89^\circ\, 59'\, 60''$

$$\begin{array}{r} 89^\circ\, 59'\, 60'' \\ -\ 52^\circ\, 18'\, 18'' \\ \hline 37^\circ\, 41'\, 42'' \end{array}$$

Άρα: $\hat{\Gamma} = 37^\circ\ 41'\, 42''$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \gamma = \beta \cdot \varepsilon\varphi\Gamma$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log\gamma = \log(\beta\varepsilon\varphi\Gamma) \Rightarrow \log\gamma = \log\beta + \log\varepsilon\varphi\Gamma \Rightarrow$

$\log\gamma = \log 283{,}83 + \log\varepsilon\varphi(37^\circ\ 41'\, 42'')^{*} \Rightarrow \log\gamma = 2{,}45306 + 9{,}88804 \Rightarrow$

$\log\gamma = 12{,}34110^{**}(-10) \Rightarrow \log\gamma = 2{,}34110$ Άρα γ= 219,33 m

* *

d=20

d=6

34104 < 34110 < 34124

↓ ↓

2193 ←—1—→ 2194

$$\begin{array}{r} 2193 \\ +00003 \\ \hline 21933 \end{array}$$

Σε d=20 1

Σε d=6 x=; $x = \frac{1 \times 6}{20} = \frac{3}{10} = 3$

*

d=42''

$\log\varepsilon\varphi(37^\circ\ 41') < \log\varepsilon\varphi(37^\circ\ 41'\, 42'') < \log\varepsilon\varphi(37^\circ\ 42')$

↓ ↓

9,88786 ←—d=26—→ 9,88812

$$\begin{array}{r} 9{,}88786 \\ +\ \ \ 18 \\ \hline 9{,}88804 \end{array}$$

Σε 60'' 26

Σε 42'' x=; $x = \frac{26 \cdot 42}{60} = 18{,}2 \simeq 18$

$2^η$ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (4ης Περίπτωσης)

Έστω ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα α=1,65m και η κάθετη πλευρά β=0,75m. Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας Β.

$ημB = \frac{β}{α}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$\log ημB = \log\frac{β}{α} \Rightarrow \log ημB = \log β - \log α \Rightarrow$

$\log ημB = \log 0{,}75 - \log 1{,}65 = \bar{1},87506 - 0{,}21748 \Rightarrow$

$\log ημB = 9{,}87506(-10) - 0{,}21748 = 9{,}65758 \Rightarrow \hat{B} = 27^0\ 2',1$ (παρεμβολή)

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$\hat{Γ} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{Γ} = 89^\circ\ 60' - 27^\circ\ 2',1 = 62^\circ\ 57',9$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$εφΓ = \frac{γ}{β} \Rightarrow γ = β \cdot εφΓ$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

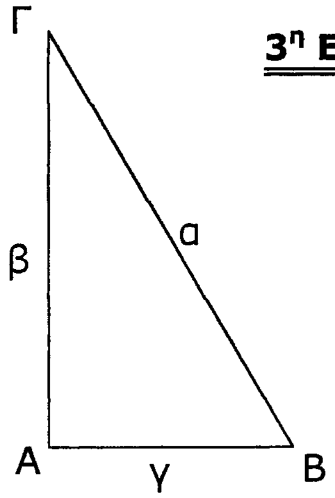
$\log γ = \log(β εφΓ) \Rightarrow \log γ = \log β + \log εφΓ \Rightarrow$

$\log γ = \log 0{,}75 + \log εφ(62^\circ\ 57',9) \Rightarrow$

$\log γ = \bar{1},87506 + 10{,}29218 \Rightarrow$

$\log γ = 9{,}87506\ (-10) + 10{,}29218 \Rightarrow$

$\log γ = 20{,}16724\ (-20) = 0{,}16724$ Άρα γ= 1,74 m



3η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (4ης Περίπτωσης)

Έστω ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα α=2,65m και η κάθετη πλευρά β=1,75 m. Να υπολογιστεί η πλευρά γ. (ΘΕΜΑ εξετάσεων Φεβρουαρίου 2002)

Λύση:

α)Υπολογισμός της γωνίας Γ.

$συνΓ = \frac{β}{α}$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$logσυνΓ = log\frac{β}{α} \Rightarrow logσυνΓ = logβ - logα \Rightarrow$

$logσυνΓ = log1,75 - log2,65 = 0,24304 - 0,42325 \Rightarrow$

$logσυνΓ = 10,24304 - 0,42325 = 9,81979^{*} \Rightarrow$ $\hat{Γ} = 48^0\ 40'\ 43''$

* παρεμβολή: $9,81969 < 9,81979 < 9,81983$

$9,81969 \downarrow 48^0\ 41'$ $\quad$ $9,81983 \downarrow 48^0\ 40'$

Σε 14 60''

Σε 10 x=; $x = \frac{60 \times 10}{14} = 43''$

β) Υπολογισμός της πλευράς γ

$εφΓ = \frac{γ}{β} \Rightarrow γ = β \cdot εφΓ$ (1) Λογαριθμίζω την (1) και έχω

$logγ = log(βεφΓ) \Rightarrow logγ = logβ + logεφΓ \Rightarrow$

$logγ = log1,75 + logεφ(48^0\ 40'\ 43'')^{*} = 0,24304 + 10,05592 \Rightarrow$

$logγ = 10,29896 \Rightarrow logγ = 0,29896^{**} \Rightarrow$ Άρα γ= 1,9905 m

* παρεμβολή

$48^\circ\ 40' < 48^\circ\ 40'\ 43'' < 48^\circ\ 41'$

$48^\circ\ 40' \downarrow 10,05574$ $\quad$ $48^\circ\ 41' \downarrow 10,05599$

Σε 60'' 25

Σε 43'' x=; $x = \frac{25 \cdot 43}{60} \simeq 17,92 \simeq 18$

* * παρεμβολή:

$0,29885 < 0,29896 < 0,29907$

$0,29885 \downarrow 1990$ $\quad$ $0,29907 \downarrow 1991$

Σε 22 1

Σε 11 x=; $x = \frac{1 \times 11}{22} = 0,5$

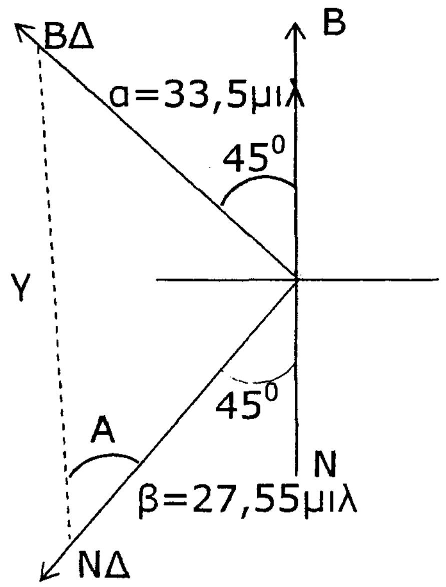
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΤΟΥΣ ΝΑΥΤΙΚΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

***1.** Δυο πλοία Α και Β ξεκινούν από το ίδιο λιμάνι. Το Α διευθύνεται προς ΝΔ, το δε Β προς ΒΔ (όπως το παρακάτω σχήμα 1). Αν το Α έπλευσε 27,5 μίλια, κατά την ίδια στιγμή το Β έπλευσε 33,5 μίλια. Να βρεθεί πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο πλοία;*

Λύση:



Οι δύο διευθύνσεις των πλοίων σχηματίζουν γωνία 90^0.

α) Υπολογισμός της γωνίας Α.

$$\text{εφ}A = \frac{\alpha}{\beta}, \log \text{εφ}A = \log\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow$$

$$\log \text{εφ}A = \log\alpha - \log\beta \Rightarrow$$

$$\log \text{εφ}A = \log 33,5 - \log 27,5 \Rightarrow$$

$$\log \text{εφ}A = 11,52505 - 1,43933 = 10,08571$$

Άρα $\log\text{εφ}A = 10,08571$, $\hat{A} = 50^0\ 37'$

β) Υπολογισμός της πλευράς γ.

$\text{τεμν}A = \frac{\gamma}{\beta}$, $\gamma = \beta\,\text{τεμν}A$, $\log\gamma = \log\beta + \log\text{τεμν}A \Rightarrow$

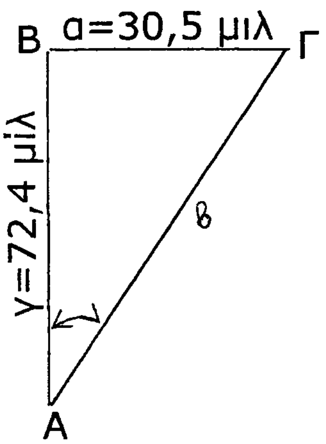
$$\log\gamma = \log 27,5 + \log\text{τεμν}50^0\ 37' \Rightarrow \log\gamma = 1,43933 + 10,19757 \Rightarrow$$

$\log\gamma = 11,63690 \Rightarrow \log\gamma = 1,63690(+10) \Rightarrow \gamma = 43,34$ ναυτ.μίλια.

Η απόσταση των πλοίων είναι 43,34 ναυτικά μίλια.

***2.** Ένα πλοίο πλέει 72,4 μίλια προς το Βορρά και κατόπιν 30,5 μίλια προς Απηλιώτην. Ζητείται η πορεία, την οποία έπρεπε να ακολουθήσει για να φτάσει στον προορισμό του, καθώς και η απόσταση της πορείας αυτής.*

<u>Λύση:</u>



α) Υπολογισμός της γωνίας *Α*

$$εφA = \frac{α}{γ} \text{ και } \log εφA = \log α - \log γ \Rightarrow$$

$$\log εφA = \log 30,5 - \log 72,4 \Rightarrow$$

$$\log εφA = 1,48430 - 1,85974 \Rightarrow$$

$$\log εφA = 11,48430(-10) - 1,85974 \Rightarrow$$

$$\log εφA = 9,62456$$

Άρα logεφA=9,62456, $\hat{A} = 22^0\ 50',5$

β) Υπολογισμός της πλευράς β

$στεμA = \frac{β}{α}$ και $β = αστεμA$, logβ=logα + logστεμA ⇒ logβ=log30,5+logστεμ(22° 50',5) ⇒
logβ=1,48430+10,41096=11,89526(-10) ⇒ logβ=1,89526 και β=78,57 Ν.ΜΙΛΙΑ.

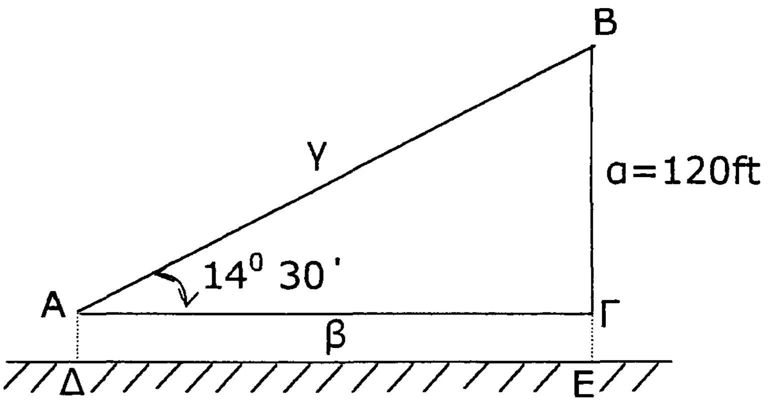
Άρα η πορεία του πλοίου είναι: $22^0\ 50',5$ (δηλαδή Βορράς προς Απηλιώτην)

και η απόσταση είναι 78,57 ναυτ.μίλια.

Η πρόσθεση ή η αφαίρεση του 10, από εδώ και πέρα όπου είναι αναγκαία θα γίνεται αυτομάτως.

3. *Η κορυφή ιστού ενός πλοίου απέχει 126ft από την επιφάνεια της θάλασσας. Ένας παρατηρητής από μια λέμβο βλέπει την κορυφή του ιστού υπό γωνία $14^0 30'$. Αν η απόσταση του οφθαλμού του παρατηρητή από την θάλασσα είναι 6,7ft, να υπολογιστεί η απόσταση από το πλοίο.*

Λύση:



Στο τρίγωνο ΑΒΓ έστω Α η γωνία που σχηματίζεται από το οριζόντιο επίπεδο του παρατηρητή και της κορυφής του ιστού. Επειδή το ύψος της κορυφής του ιστού πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας είναι 126ft και η απόσταση του οφθαλμού του παρατηρητή 6ft πάνω από τη θάλασσα η κουφή του ιστού είναι 120ft πάνω από το οριζόντιο επίπεδο του οφθαλμού του παρατηρητή.

Άρα ΒΓ είναι το ύψος του ιστού.

α) Υπολογισμός της πλευράς β.

$σφA = \frac{β}{α} \Rightarrow$ β=ασφΑ, logβ=logα + logσφΑ $\Rightarrow$

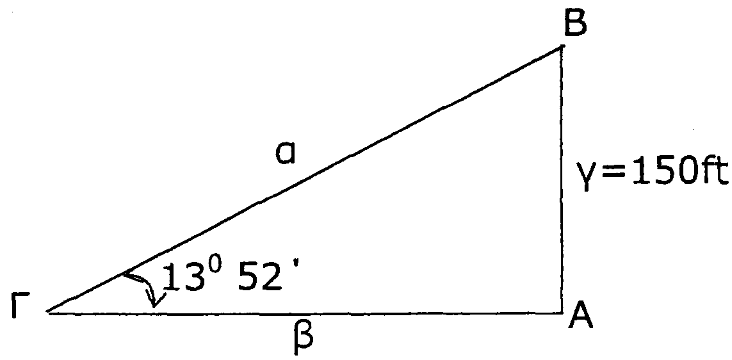
$\Rightarrow$ logβ=log120 + log(14^0 30′)$\Rightarrow$ logβ=2,07918+10,58734 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logβ=2,66652(+10) Άρα <u>β=464 ft</u>

Η απόσταση του παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στην λέμβο από το πλοίο είναι 464 ft.

__4.__ Το ύψος ενός φάρου που βρίσκεται πάνω σε μια βραχονησίδα είναι 150ft. ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην ακτή βλέπει την κορυφή του φάρου υπό γωνία $13^0\ 52'$. Να βρεθεί η απόσταση του φάρου από την ακτή.

<u>Λύση:</u>



α) Υπολογισμός της πλευράς β.

$σφΓ = \frac{β}{γ} \Rightarrow β=γσφΓ \Rightarrow \log β=\log γ+\log σφΓ \Rightarrow$

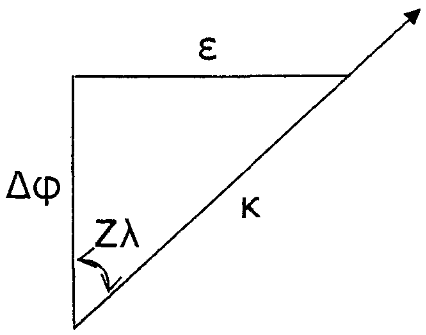
$\Rightarrow \log β=\log 150 + \log(13^0\ 52') \Rightarrow \log β= 2{,}17609 + 10{,}60755 \Rightarrow$

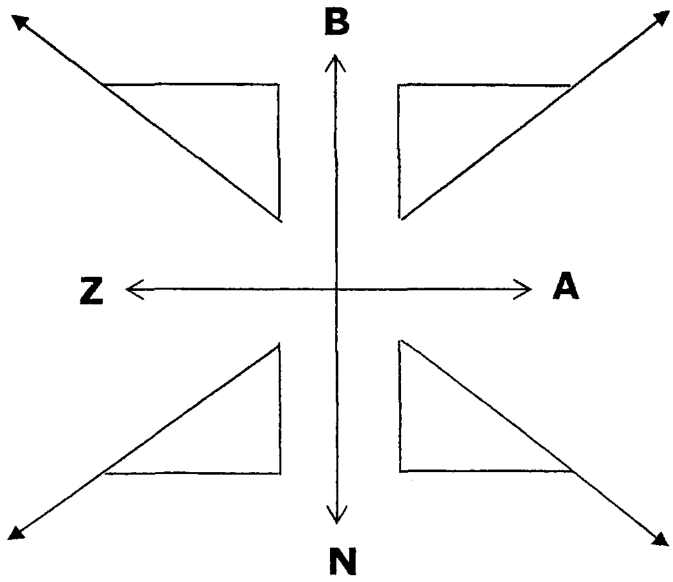
$\log β= 12{,}78364 \Rightarrow \log β= 2{,}78364(+10) \Rightarrow β=607{,}63$ ft.

Η απόσταση του φάρου από την ακτή είναι 607,63 ft.

ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ

Το τρίγωνο πλεύσης είναι ένα επίπεδο ορθογώνιο τρίγωνο προσανατολισμένο, με κάθετες πλευρές την αποχώρηση (ε) και την διαφορά πλάτους (Δφ) και με υποτείνουσα το δίαρμα (κ). Η μία οξεία γωνία παριστάνει την πορεία (πλεύση) (Ζλ) κατά το λοξοδρομικό πλουν.





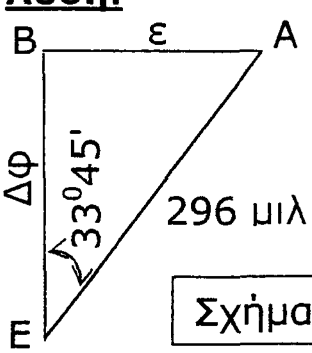
1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Δίνεται η αληθής πορεία (Ζλ) και η απόσταση που διανύθηκε και ζητούνται η διαφορά πλάτους (Δφ) και η αποχώρηση (ε).

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πλοίο από μια θέση πλάτους (φε)=48°40'Β πλέει προς Β33°45'Α 296 μίλια (σχήμα 1). Να βρεθεί το πλάτος άφιξης και η αποχώρηση.

Λύση:



Σχήμα 1.

Έστω Ε το σημείο εκκίνησης και Α το σημείο άφιξης. Άρα ΕΑ=296 μίλια, ΕΒ μεσημβρινός του Ε, οπότε $\hat{AEB}$=33°45', ΑΒ ο παράλληλος του Β, οπότε ΑΒ=ε και ΒΕ= Δφ.

α) Υπολογισμός της αποχώρησης (ε)

$$\eta\mu\hat{E} = \frac{\varepsilon}{AE} \Rightarrow \varepsilon = AE * \eta\mu\hat{E} \Rightarrow \log\varepsilon = \log AE + \log\eta\mu\hat{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\varepsilon = \log 296 + \log\eta\mu(33^{0}45') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\varepsilon = 2,47129 + 9,74474 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\varepsilon = 2,21603(+10) \Rightarrow \varepsilon = 164,4 \text{ ναυτ. μίλια}$$

β) Υπολογισμός της διαφοράς πλάτους (Δφ)

$$\sigma\upsilon\nu\hat{E} = \frac{\Delta\varphi}{AE} \Rightarrow \Delta\varphi = AE * \sigma\upsilon\nu\hat{E} \Rightarrow \log\Delta\varphi = \log AE + \log\sigma\upsilon\nu\hat{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\Delta\varphi = \log 296 + \log\sigma\upsilon\nu(33^{0}45') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\Delta\varphi = 2,47129 + 9,91985 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\Delta\varphi = 2,39114 \Rightarrow \Delta\varphi = 246,1 \text{ ναυτ. μίλια}$$

γ) Υπολογισμός του πλάτους άφιξης

φ_{ε}=48^{0} 40' Β

Δφ=246',1 ή 4^{0} 6'

$\varphi_{\alpha} = \varphi_{\varepsilon} + \Delta\varphi = 48^{0}\,40' + 4^{0}\,6' \Rightarrow \varphi_{\alpha} = 52^{0}\,46'$

Άρα $\varphi_{\alpha} = 52^{0}\,46'$ Β και ε=164,4 μίλια

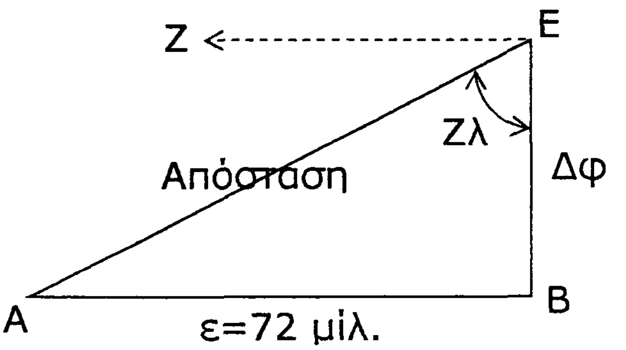
2^{η} ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Δίδεται η διαφορά πλάτους και η αποχώρηση και ζητείται η αληθής πορεία και η απόσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πλοίο πλέει από μια θέση πλάτους $\varphi_\varepsilon=32^0\ 38'$ Β σε μια πορεία μεταξύ Νότου και Ζέφυρου έως ότου φθάνει στο σημείο που έχει $\varphi_\alpha=31^0\ 13'$ Β. Να βρεθεί η αληθής πορεία και η διανυθείσα απόσταση, εάν η αποχώρηση είναι ε=72 μίλια.

Λύση:



Έστω Ε το σημείο εκκίνησης, Α το σημείο άφιξης, ΕΒ ο μεσημβρινός του Ε και ΑΒ ο παράλληλος του Α, οπότε $A\hat{E}B=Z_\lambda$, ΕΑ= απόσταση, ΕΒ=Δφ και ΑΒ=72 μίλια

α) Υπολογισμός της Δφ

$\varphi_\varepsilon-\varphi_\alpha=32^0\ 38'B-31^0\ 13'B=1^0\ 25'$ ή 85 ναυτικά μίλια.

β) Υπολογισμός της πορείας

$\varepsilon\varphi Z_\lambda=\dfrac{\varepsilon}{\Delta\varphi}$ και $\log\varepsilon\varphi Z_\lambda=\log\varepsilon-\log\Delta\varphi \Rightarrow \log\varepsilon\varphi Z_\lambda=\log 72-\log(1^0\ 25')$

$\Rightarrow \log\varepsilon\varphi Z_\lambda=11{,}85733(-10)\ -1{,}92942$

$\log\varepsilon\varphi Z_\lambda=9{,}92791$, $Z_\lambda=$ Ν $40^0\ 16'$ Ζ

γ) Υπολογισμός της απόστασης.

$\tau\varepsilon\mu\nu Z_\lambda=\dfrac{\text{Απόσταση}}{\Delta\varphi} \Rightarrow \text{Απόσταση}=\Delta\varphi * \tau\varepsilon\mu\nu Z_\lambda$

$\log\text{Απόστασης}=\log\Delta\varphi+\log\tau\varepsilon\mu\nu Z_\lambda \Rightarrow \log\text{απόστασης}=\log(1^0\ 25')+\log(40^0\ 16')$

$\Rightarrow \log\text{απόστασης}=1{,}92942+10{,}11745=12{,}04687(-10)$

Απόσταση=111,4 μίλια
Άρα $Z_\lambda=$ Ν 40^0 16' Ζ και απόσταση ΑΕ=111,4 Ναυτικά μίλια

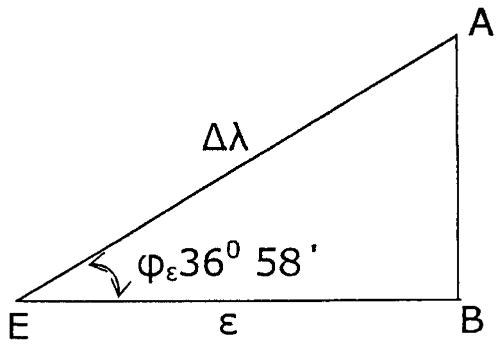
$3^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Δίδεται η διαφορά μήκους ($Δ_λ$) μεταξύ δυο θέσεων, επί του αυτού παράλληλου και ζητείται η απόσταση τους.

1.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πλοίο με $φ_ε$= 36^0 58' Β και $λ_ε$ = 20^0 25' Δ πλέει προς ένα νησί που βρίσκεται στον ίδιο παράλληλο και σε $λ_α$=25^0 13' Δ. Ποια απόσταση πρέπει να διανύσει το πλοίο για να φθάσει σε αυτό το νησί;

Λύση:



α) Υπολογισμός της $Δ_λ$

$Δ_λ$= $λ_ε$-$λ_α$=20^0 25' Δ-25^0 13' Δ

= $04^0$48'=288' = 288 ν.millie

Έστω Ε το σημείο εκκίνησης και Β το σημείο άφιξης, οπότε ΕΑ=$Δ_λ$ στο $φ_ε$ = 36^0 58΄ και ΕΒ η ευθεία που σχηματίζει γωνία με την ΕΑ ίση με $φ_ε$ = 36^0 58΄. Επίσης η ΑΒ είναι κάθετος στην ΕΒ, οπότε ΕΒ=ε.

β) Υπολογισμός της ε

$$συνφ_ε = \frac{ε}{Δ_λ} \Rightarrow ε = Δ_λ * συνφ_ε$$

$$\log ε = \log Δ_λ + \log συνφ_ε \Rightarrow$$

$$\log ε = \log 288 + \log συν(36^0 58') \Rightarrow$$

$$\log ε = 2,45939 + 9,90254 = 12,36193 \Rightarrow$$

$$\log ε = 2,36193 (+10)$$

Άρα ε = 230,1 Ναυτικά μίλια η απόστασή τους.

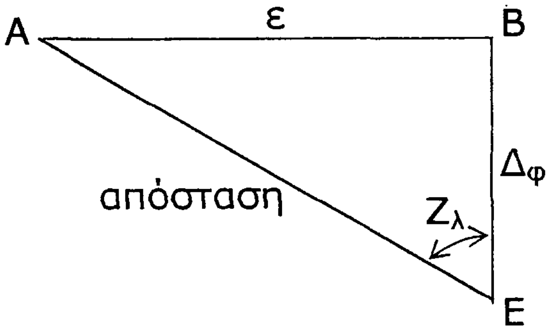
4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Δίδεται η αληθής πορεία ($Z_λ$) και η διαφορά πλάτους και ζητείται η διανυθείσα απόσταση και η αποχώρηση.

1.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πλοίο ξεκίνησε (έπλευσε) από ένα νησί με $φ_ε= 3^0$ 54' Ν προς Β 53^0 26',3 Ζ και έφθασε σε λιμάνι με $φ_α=2^0$ 14' Β. Να υπολογιστεί η διανυθείσα απόσταση και η αποχώρηση.

Λύση:



α) Υπολογισμός της $Δ_φ$

$Δ_φ= φ_α+φ_ε=2^0$ 14'Β+3^0 54' Ν ⇒

$Δ_φ= 6^0$ 08' ή 368' ναυτικά μίλια.

β) Υπολογισμός της απόστασης

$$τεμνZ_λ = \frac{αποσταση}{Δ_φ} \Rightarrow αποσταση = Δ_φ * τεμνZ_λ$$

$$\log αποστασης = \log Δ_φ + \log τεμνZ_λ \Rightarrow$$

$$\log αποστ = \log 368 + \log τεμν(53^0 26',3) \Rightarrow$$

$$\log αποστασης = 2,56585 + 10,22501 \Rightarrow$$

$\log αποστασης = 12,79086(-10)$ ΑΠΟΣΤΑΣΗ=617,8 Ν.Μ

γ) Υπολογισμός της αποχώρησης (ε)

$$εφZ_λ = \frac{ε}{Δ_φ} \Rightarrow ε = Δ_φ * εφZ_λ , \log ε = \log Δ_φ + \log εφZ_λ \Rightarrow$$

$$\log ε = \log 368 + \log εφ(53^0 26',3) = 2,56585 + 10,12981 \Rightarrow$$

$\log ε = 12,69566(-10)$ ε=496,2 μίλια

Άρα η αποχώρηση είναι 496,2 ναυτικά μίλια.

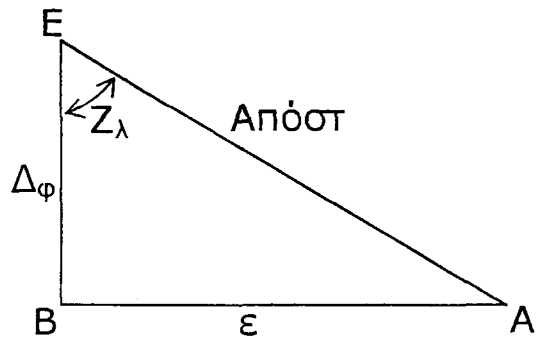
$5^{η}$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Δίδεται η αληθής πορεία και η αποχώρηση και ζητείται η διαφορά πλάτους και η διανυθείσα απόσταση.

1.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πλοίο ξεκινά από ένα λιμάνι με πλάτος $\varphi_\varepsilon = 15^0\ 55'$ N και πλέει προς N $61^0\ 52',5$ A έως ότου η αποχώρηση του γίνεται 155 μίλια. Ζητείται το πλάτος άφιξης και η διανυθείσα απόσταση.

Λύση:



α) Υπολογισμός του Δ_φ

$$\sigma\varphi Z_\lambda = \frac{\Delta_\varphi}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta_\varphi = \varepsilon * \sigma\varphi Z_\lambda\ ,$$

$$\log \Delta_\varphi = \log\varepsilon + \log\sigma\varphi Z_\lambda \Rightarrow$$

$$\log\Delta_\varphi = \log 115 + \log\sigma\varphi(61^0\ 52',5) \Rightarrow \log\Delta_\varphi = 2,06070 + 9,72796 \Rightarrow$$

$\log\Delta_\varphi = 11,78866(-10)$, $\Delta_\varphi = 26^0\ 1',8$, <u>$\varphi_\alpha = 10^0\ 6,8'$</u>

β) Υπολογισμός απόστασης

$$\sigma\tau\varepsilon\mu Z_\lambda = \frac{\alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta}{\varepsilon} \Rightarrow \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta = \varepsilon * \sigma\tau\varepsilon\mu Z_\lambda$$

$$\log \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma = \log\varepsilon + \log\sigma\tau\varepsilon\mu Z_\lambda \Rightarrow$$

$$\log \alpha\pi o\sigma\tau = \log 115 + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(61^0 52',5) \Rightarrow$$

$$\log \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma = 2,06070 + 10,05457 \Rightarrow$$

$$\log \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma = 12,11527(-10)$$

<u>Απόσταση = 1304 ναυτ/μίλια.</u>

Άρα το πλάτος άφιξης είναι $1^0\ 1',8$ & η απόσταση είναι 1304 N.M

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΤΕΣ
(ΤΡΙΓΩΝΟ ΠΛΕΥΣΗΣ)

Ι. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Ένα πλοίο από μια θέση πλάτους $\varphi_\varepsilon = 18^0$ 34' Ν πλέει προς Β 52^0 15' Ζ, 385 ναυτικά μίλια. Να βρεθεί το πλάτος άφιξης και η αποχώρηση.

2. Πλοίο από θέση Ε με $\varphi_\varepsilon = 54^0$ 18' Ν πλέει προς πορεία μεταξύ Νότου και Ζέφυρου μέχρι σημείου Α με $\varphi_\alpha = 57^0$ 42' Ν. Να βρεθεί η αληθή πορεία Z_λ και το δίαρμα και αν ε=102 ν. μίλια

3. Ένα πλοίο από μια θέση Ε με $\varphi_\varepsilon = 18^0$ 27' Ν πλέει σε μια πορεία μεταξύ Βορρά και αποπλέει μέχρι σημείου Α με $\varphi_\alpha = 16^0$ 08' Ν. Να βρεθεί η αληθής πορεία του και το δίαρμα και αν η αποχώρηση είναι 87,5 ναυτικά μίλια.

ΙΙ.ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Ένα πλοίο από σημείο Α πλάτους $\varphi_\varepsilon = 42^0$ 17' Ν και μήκους $\lambda_\varepsilon = 132^0$ 45' Α πλέει προς σημείο Β πάνω στον ίδιο παράλληλο και σε $\lambda_\alpha = 123^0$ 18' Α. Ποια απόσταση πρέπει να διανύσει;

2. Πλοίο πλέει με ταχύτητα u=14 Km/h πάνω στον ίδιο παράλληλο. Στις 08.30 βρίσκεται σε σημείο $\varphi_\varepsilon = 37^0$ 16' Β και $\lambda_\varepsilon = 74^0$ 18' Δ. Τι ώρα θα βρίσκεται στον ίδιο παράλληλο και σε $\lambda_\alpha = 78^0$ 46' Δ.

3. Πλοίο πλέει στον ίδιο παράλληλο από σημείο Α ($\varphi=42^0$18'Β, $\lambda=44^0$ 24'Δ) σε σημείο Β με μήκος $\lambda'= 52^0$ 12'Δ [illegible] οποίο πρέπει να φτάσει σε 24 ώρες. Πόση πρέπει να είναι η [illegible]ητα του.

III.ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Ένα πλοίο από σημείο πλάτους $\varphi_\varepsilon = 41^0\ 58'$ Β και $\lambda_\varepsilon = 15^0 25'$Δ πλέει προς ένα νησί πάνω στον ίδιο παράλληλο και σε $\lambda_\alpha = 30^0\ 13'$ Δ. Πόση απόσταση θα διανύσει;

2. Ένα πλοίο από σημείο πλάτους $\varphi_\varepsilon = 31^0 58'$Ν και $\lambda_\varepsilon = 15^0 25'$Α πλέει προς ένα νησί πάνω στον ίδιο παράλληλο και σε $\lambda_\alpha = 20^0 13'$ Δ. Πόση απόσταση θα διανύσει;

IV.ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Ένα πλοίο από μια θέση Α ($\varphi_\varepsilon = 23^0\ 54'$ Β, $\lambda_\varepsilon = 78^0\ 42'$ Δ) πλέει προς $304^0\ 16'$ και φθάνει σε $\varphi_\alpha = 26^0\ 32'$ Β. Να βρείτε την διανυθείσα απόσταση και το μήκος άφιξης.

2. Πλοίο πλέει προς $204^0\ 16'$ και από θέση Α πλάτους $\varphi_\varepsilon = 42^0\ 15'$ Β, μήκους $\lambda_\varepsilon = 34^0\ 18'$ Δ φθάνει σε $\lambda_\alpha = 41^0\ 24'$ Δ. Να βρείτε το πλάτος άφιξης και την διανυθείσα απόσταση.

V.ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Πλοίο από θέση Α ($\varphi_\varepsilon = 24^0\ 25'$ Β, $\lambda_\varepsilon = 32^0\ 16'$ Δ) πλέει προς Β $52^0\ 40'$ Ζ μέχρι ότου φθάσει σε $\lambda_\alpha = 41^0\ 08'$ Δ. Να βρείτε το πλάτος άφιξης.

2. Πλοίο από θέση Α ($\varphi_\varepsilon = 41^0\ 18'$ Ν, $\lambda_\varepsilon = 16^0\ 2'$ Α) πλέει προς $215^0\ 20'$ Ζ και φθάνει σε $\lambda_\alpha = 2^0\ 40'$ Δ. Να βρείτε το πλάτος άφιξης.

3. Πλοίο από θέση Α ($\varphi_\varepsilon = 32^0\ 16'$ Ν, $\lambda_\varepsilon = 40^0\ 18'$ Α) πλέει προς $210^0\ 30'$ και φθάνει σε $\lambda_\alpha = 42^0\ 18'$Α. Να βρεθεί η απόσταση.

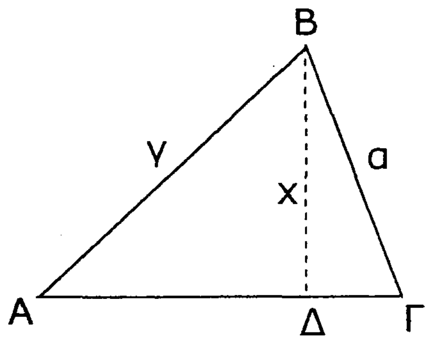
ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

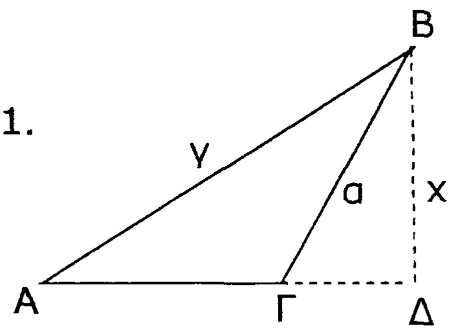
Α) ΤΥΠΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ} = κ$$

ΚΑΝΟΝΑΣ " Ο λόγος δύο πλευρών οποιουδήποτε τριγώνου ισούται προς τον λόγο των ημιτόνων των απέναντι γωνιών του "

ΑΠΟΔΕΙΞΗ





Σχήμα 1.

Έστω ότι έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 1.). Από την κορυφή Β φέρουμε το ύψος ΒΔ=x. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} ημA = \frac{x}{γ} \Rightarrow x = γ * ημA \\ ημΓ = \frac{x}{α} \Rightarrow x = α * ημΓ \end{aligned}\right\} \Rightarrow γημA = αημΓ \text{ ή } \frac{α}{γ} = \frac{ημA}{ημΓ}$$

ομοίως αποδεικνύεται ότι: $\frac{γ}{β} = \frac{ημΓ}{ημB}$ και $\frac{β}{α} = \frac{ημB}{ημA}$

ή $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ (1)

ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ (2) και

$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) $\Rightarrow$ ο τύπος των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \kappa$$

Με τον τύπο των ημιτόνων μπορούμε να επιλύσουμε οποιοδήποτε τρίγωνο όταν γνωρίζουμε:

α) Μια πλευρά και δυο γωνίες και

β) Δυο πλευρές και μια γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μια από τις δυο δοθείσες πλευρές.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

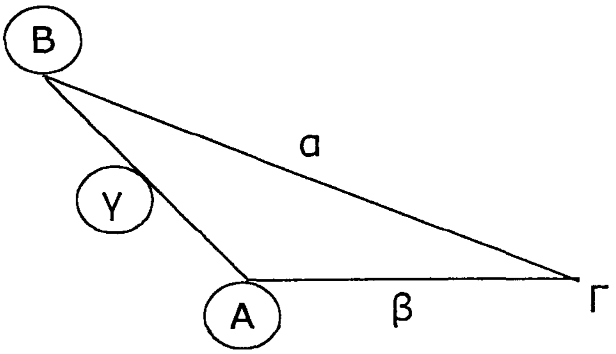
(Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων οποιουδήποτε τριγώνου)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α) ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΜΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΕΣ Σ' ΑΥΤΗ ΓΩΝΙΕΣ

1. *Σε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:* $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 30^0$ *και η πλευρά γ=8,2 m. Να υπολογιστεί η τρίτη γωνία και οι πλευρές α και β.*

<u>Λύση:</u>



α) Υπολογισμός της γωνίας $\hat{\Gamma}$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow$$

$$\hat{\Gamma} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow$$

$$\hat{\Gamma} = 180^0 - 100^0 - 30^0 \Rightarrow$$

$$\hat{\Gamma} = 180^0 - 130^0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\Gamma} = 50^0}}$$

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \alpha = \gamma * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow$$

α=γ·ημΑ·στεμΓ (1) λογαριθμίζω την (1) logα=log(γ * ημΑ * στεμΓ)

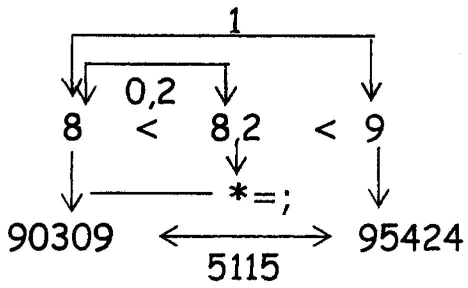
$\Rightarrow$ logα = logγ + logημΑ + logστεμΓ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log8,2 + logημ100 + logστεμ50 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα =0,91332 + 9,99335 + 10,11575 $\Rightarrow$ (*)

$\Rightarrow$ logα = 21,02242 $\Rightarrow$ logα = 1,02242 (-10) $\Rightarrow$ <u>α=10,5m</u> (* *)

*



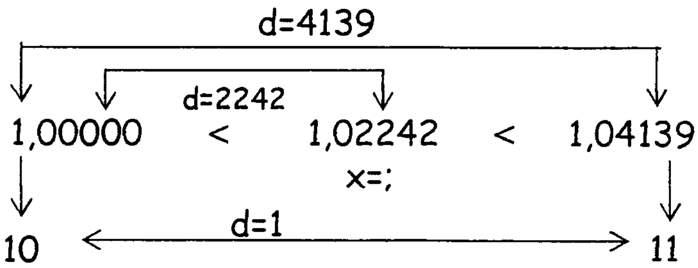
$$\begin{array}{r} 90309 \\ +\ 1023 \\ \hline 91332 \end{array}$$

Σε 1 5115

Σε 0,2 x=;

$$x = \frac{5115 * 0,2}{1} = 1023$$

* *



Σε d=4139 1

Σε d=2242 x=;

$$x = \frac{1 * 2242}{4139} = 0,5412 \simeq 0,5$$

Άρα

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 0,5 \\ \hline 10,5 \end{array}$$

γ) Υπολογισμός της πλευράς β

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \beta = \gamma * \eta\mu B * \frac{1}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow$$

$\beta = \gamma * \eta\mu B * \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma$ (1) λογαριθμίζω την σχέση (1)

$\log\beta = \log(\gamma * \eta\mu B * \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma)$

$\Rightarrow \log\beta = \log\gamma + \log\eta\mu B + \log\sigma\tau\epsilon\mu\Gamma \Rightarrow$

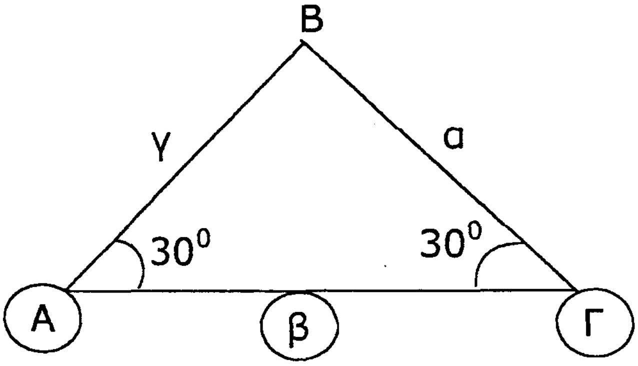
$\Rightarrow \log\beta = \log 8,2 + \log\eta\mu 30^0 + \log\sigma\tau\epsilon\mu 50^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = 0,91332 + 9,69897 + 10,11575 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = 20,72804 \Rightarrow \log\beta = 0,72804\ (-20) \Rightarrow$ <u>β=5,346 m</u>

2. *Σε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{A} = 30^0$, $\hat{\Gamma} = 30^0$ και η πλευρά β=8,2 m. Να υπολογιστούν οι πλευρές α και γ καθώς και η γωνία Β.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας $\hat{B}$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow$$

$$\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\hat{B} = 180^0 - 30^0 - 30^0 \Rightarrow$$

$$\hat{B} = 120^0$$

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu B} \Rightarrow$$

$\alpha = \beta * \eta\mu A * \sigma\tau\epsilon\mu B$ (1) λογαριθμίζω την σχέση (1)

$\log = \log(\beta * \eta\mu A * \sigma\tau\epsilon\mu B)$

$\Rightarrow$ logα = logβ + logημΑ + logστεμΒ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log8,2 + logημ30^0 + logστεμ120^0 $\Rightarrow$

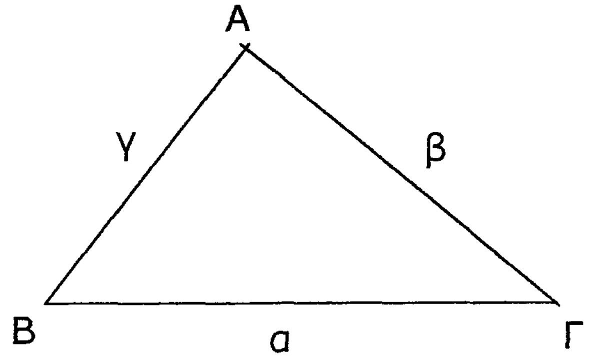
$\Rightarrow$ logα =0,91381 + 9,69897 + 10,06247 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 20,67525 $\Rightarrow$ logα = 0,67525 (-20) $\Rightarrow$ <u>α=4,734 m</u>

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($\hat{A} = \hat{\Gamma} = 30^0$) άρα οι πλευρές γ και α είναι ίσες $\Rightarrow$ <u>α=γ=4,734 m</u>

3. *Σε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{A}=70^0$, $\hat{\Gamma}=58^0 16'$ και η πλευρά β=6 μίλια. Να υπολογιστούν οι πλευρές α και γ καθώς και η γωνία Β.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας $\hat{B}$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0 \Rightarrow$$

$$\hat{B}=180^0-\hat{A}-\hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\hat{B}=180^0-70^0-58^0 16' \Rightarrow$$

$$\hat{B}=51^0 44'$$

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha=\frac{\beta*\eta\mu A}{\eta\mu B}. \text{ Επομένως } \log\alpha=\log\frac{\beta*\eta\mu A}{\eta\mu B} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logα = logβ + logημA - logημB $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log6 + logημ70^0 - logημ51^0 44' $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα =0,77815 + 9,97299 - 9,89495 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 10,75114 - 9,89495

$\Rightarrow$ logα = 0,85619 $\Rightarrow$ <u>α=7,181 μίλια</u>

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \gamma=\frac{\beta*\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B} \Rightarrow$$

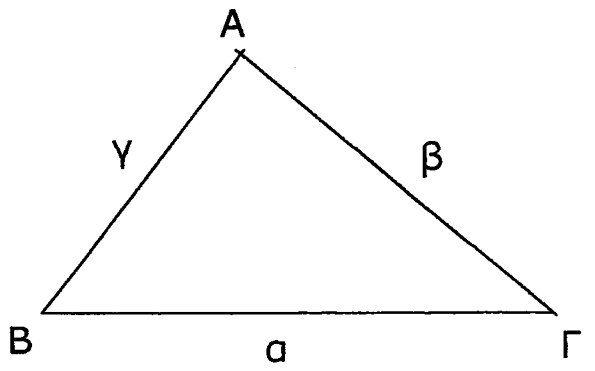
$\Rightarrow$ logγ= logβ + logημΓ - logημB $\Rightarrow$logγ = log6 + logημ58^0 16' - logημ51^0 44'

$\Rightarrow$ logγ =0,77815 + 9,92968 - 9,89495 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logγ = 10,70783 - 9,89495 $\Rightarrow$ logγ = 0,81388 $\Rightarrow$ γ<u>=6,5145 μίλια</u>

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{A} = 52^0 15'$, $\hat{B} = 70^0 26'$ και α=9,8 μέτρα, βρείτε τις πλευρές β και γ

Λύση:



α) Υπολογισμός της πλευράς β

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha * \eta\mu B}{\eta\mu A}$. Επομένως $\log\beta = \log\frac{\alpha * \eta\mu B}{\eta\mu A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = \log\alpha + \log\eta\mu B - \log\eta\mu A \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = \log 9{,}8 + \log\eta\mu 70^0\ 26' - \log\eta\mu 52^0\ 15' \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = 0{,}99123 + 9{,}97417 - 9{,}89801 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = 10{,}96540 - 9{,}89801 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\beta = 1{,}06739 \Rightarrow$ <u>β=11,68 μέτρα</u>

β) Υπολογισμός της πλευράς γ

$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha * \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\gamma = \log\alpha + \log\eta\mu\Gamma - \log\eta\mu A \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\gamma = \log 9{,}8 + \log\eta\mu 57^0\ 19' - \log\eta\mu 52^0\ 15' \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\gamma = 0{,}99123 + 9{,}92514 - 9{,}89801 \Rightarrow \log\gamma = 10{,}91637 - 9{,}89801 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\gamma = 1{,}01836 \Rightarrow$ γ<u>= 10,432 μέτρα</u> $(\hat{\Gamma} = 57^0 19')$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=54^0$, $\hat{B}=67^0$ και α=13,9m, βρείτε τις πλευρές β και γ.

(β=15,8m, γ=14,7m)

2. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=38^0\ 15'$, $\hat{B}=29^0\ 38'$, β=16,2m, βρείτε τις πλευρές α και γ.

(α=20,3m, γ=30,40m)

3. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=88^0$, $\hat{B}=36^0$ και α=9,5m, βρείτε τις πλευρές β και γ.

(β=7,88m, γ=5,59m)

4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}=75^0$, $\hat{\Gamma}=42^0$, και β=25m, βρείτε τις πλευρές α και γ.

(α=23,1m, γ=17,3m)

5. Αν σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{A}=41^0\ 48'$, $\hat{B}=48^0\ 36'$ και α=8m, βρείτε τις πλευρές β και γ.

(β≃9m, γ≃12m)

6. Αν σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{B}=59^0\ 59'$, $\hat{\Gamma}=44^0\ 49'$ και η πλευρά β=43m, να βρείτε την πλευρά γ.

(γ≃35m)

7. Αν σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{A}=28^0\ 54'$, $\hat{\Gamma}=73^0\ 23'$ και α=2,6 km, βρείτε τις πλευρές β και γ.

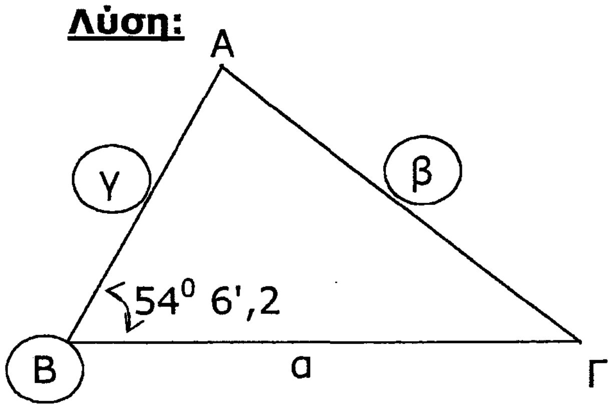
(β=2,85km, γ=4,7km)

Β) ΔΙΔΟΝΤΑΙ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΥΟ ΔΟΔΕΙΣΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ.

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. *Να επιλυθεί τρίγωνο (τυχαίο) του οποίου δίδονται:*
β= 124m, γ= 40m και $\hat{B}$ =54^0 6',2.

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \frac{\eta\mu \Gamma}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\beta} \Rightarrow \eta\mu \Gamma = \frac{\gamma * \eta\mu B}{\beta} \Rightarrow$$

$$\log \eta\mu \Gamma = \log \frac{\gamma * \eta\mu B}{\beta} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logημΓ=logγ+logημΒ- logβ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= log40 + logημ(54^0 6',2) - log124 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 1,60206 + 9,90853 - 2,09342 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 11,51059 - 2,09342 $\Rightarrow$ logημΓ= 9,41717 $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma}$= 15^0 8',9

ή $\hat{\Gamma}$=180^0 - 15^0 8',9=164^0 51',1. Η λύση αυτή όμως απορρίπτεται, διότι το άθροισμα της $\hat{\Gamma}$ και της $\hat{B}$ είναι μεγαλύτερο από 180^0.

β) Υπολογισμός της γωνίας $\hat{A}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$. Οπότε $\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \Rightarrow$

$\hat{A} = 180^0 - (54^0 6',2 + 15^0 8',9) = 180^0 - 69^0 15',1 = 110^0 44',9$

Άρα $\hat{A}$=110^0 44',9

γ) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \sigma\tau\epsilon\mu B \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logα = logβ + logημΑ + logστεμΒ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log124 + logημ(110^0 44',9) + logστεμ(54^0 6',2) $\Rightarrow$

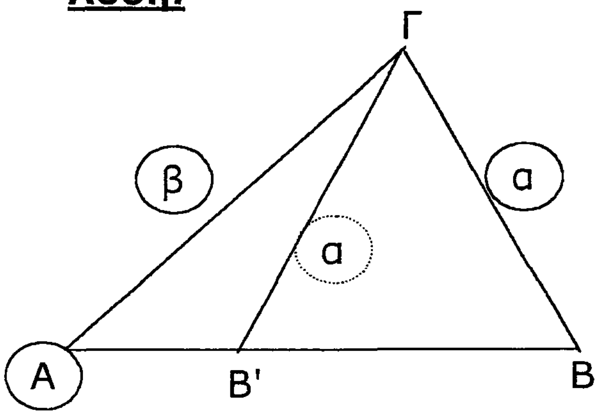
$\Rightarrow$ logα = 2,09342 + 9,97088 + 10,09147 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 22,15577 $\Rightarrow$ logα=2,15577(-20) $\Rightarrow$ α= 143,14m

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. *Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ (τυχαίο), όταν δίνονται α=25m, β=31m και $\hat{A}=32^0$.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Β.

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}\Rightarrow \eta\mu B=\frac{\beta*\eta\mu A}{\alpha}\Rightarrow$$

lognμB= logβ + lognμA - logα ⇒

lognμB=log31+lognμ32 - log25⇒

⇒ lognμB=1,49136+9,72421-1,39794⇒ lognμB=11,21557-1,39794=9,81763

Άρα $\hat{B}=41^0\ 4',7$ ή $\hat{B}=180^0-41^0\ 4',7=138^0\ 55',3$

Από το αποτέλεσμα προκύπτει ότι το πρόβλημα (άσκηση) έχει δύο λύσεις, με την καθεμία από τις οποίες θα ασχοληθούμε ξεχωριστά.

Α' ΛΥΣΗ

Όταν η γωνία $\hat{B}=41^0\ 4',7$.

β) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0\Rightarrow\hat{\Gamma}=180^0-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow\hat{\Gamma}=106^0 55',3$$

γ) Υπολογισμός της πλευράς γ

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\Rightarrow\gamma=\alpha*\eta\mu\Gamma*\frac{1}{\eta\mu A}\Rightarrow\gamma=\alpha*\eta\mu\Gamma*\sigma\tau\epsilon\mu A\Rightarrow$$

⇒ logγ = logα + lognμΓ + logστεμA ⇒

⇒ logγ = log25 + lognμ(106^0 55',3) + logστεμ32 ⇒

⇒ logγ = 1,39794 + 9,98078 +10,27579 ⇒

⇒ logγ = 21,65451 (-20) ⇒ logγ = 1,65451 ⇒ γ= 45,134 m

Β' ΛΥΣΗ

Όταν η γωνία $\hat{B} = 138^0\ 55',3$

α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^0 - (\hat{A}+\hat{B}) \Rightarrow \hat{\Gamma} = 9^0 4',7$$

β) Υπολογισμός της πλευράς γ

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \Rightarrow \gamma = \alpha * \eta\mu\Gamma * \frac{1}{\eta\mu A} \Rightarrow \gamma = \alpha * \eta\mu\Gamma * \sigma\tau\epsilon\mu A \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logγ = logα + logημΓ + logστεμΑ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logγ = log25 + logημ($9^0\ 4',7$) + logστεμ32 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logγ = 1,39794 + 9,19806 +10,27579 $\Rightarrow$

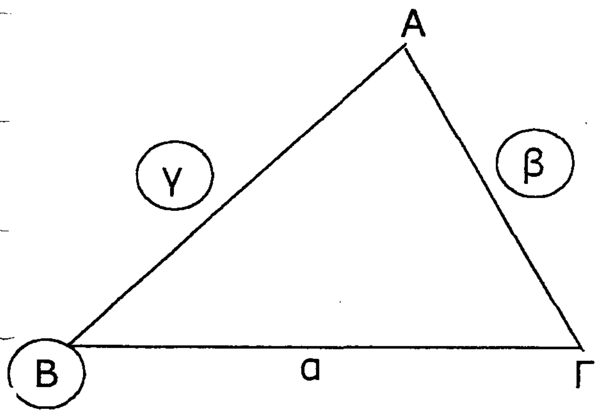
$\Rightarrow$ logγ = 20,87179 (-20) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logγ = 0,87179 $\Rightarrow$ γ<u>= 7,4436 m</u>

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. *Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ (τυχαίο), όταν δίνονται γ=70m, β=55m και $\hat{B} = 54^0\ 6',2$.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B} \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma * \eta\mu B}{\beta} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logημΓ=logγ + logημΒ - logβ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ=log70+logημ($54^0 6',2$)-log55 $\Rightarrow$

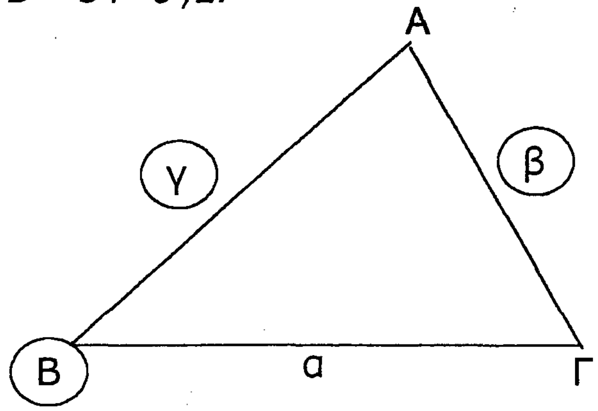
$\Rightarrow$ logημΓ=1,84510+9,90853-1,74036 $\Rightarrow$ logημΓ= 11,75363 - 1,74036 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 10,01327

Επειδή ο λόγος $\frac{\gamma * \eta\mu B}{\beta} \succ 1$, το πρόβλημα δεν έχει λύση. (ημΓ=1,030>1, αδύνατο).

2. *Να επιλυθεί τρίγωνο ΑΒΓ (τυχαίο), όταν δίνονται β=124m, γ=40m και $\hat{B} = 54^0\ 6',2$.*

<u>Λύση:</u>



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma * \eta\mu B}{\beta} \Rightarrow \log\eta\mu\Gamma = \log\gamma + \log\eta\mu B - \log\beta \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logημΓ= log40 + logημ(54^0 6',2) - log124 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 1,60206 + 9,90853 - 2,09342 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 11,51059 - 2,09342 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logημΓ= 9,41717 $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma} = 15^0\ 8',9$ ή $\hat{\Gamma} = 164^0\ 51',1$.(απορρίπτεται).

β) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \sigma\tau\varepsilon\mu B \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logα = logβ + logημΑ + logστεμΒ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log124 + logημ(110^0 44',9) + logστεμ(54^0 6',2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 2,09342 + 9,97088 + 10,09147 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 22,15577 $\Rightarrow$ logα=2,15577(-20) $\Rightarrow$ α= 143,14m

γ) Υπολογισμός της γωνίας $\hat{A}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$. Οπότε $\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \Rightarrow$

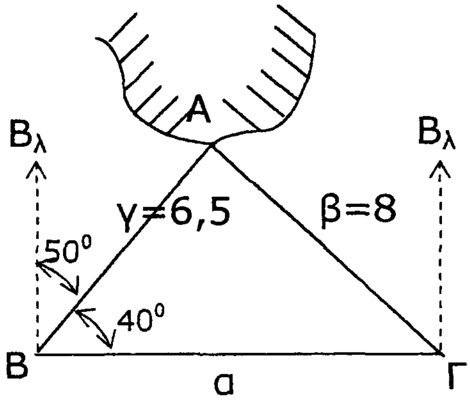
$\hat{A} = 180^0 - (54^0 6',2 + 15^0 8',9) = 180^0 - 69^0 15',1 = 110^0 44',9$

Άρα $\hat{A} = 110^0\ 44',9$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΑ ΤΡΙΓΩΝΑ
(ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΗΜΙΤΟΝΟΥ)

1. *Ένα σημείο ξηράς διωπτεύθηκε προς Β 50^0 Α από ένα πλοίο που βρίσκεται σε απόσταση 6,5 μίλια και πλέει προς Απηλιώτη. Μετά την πάροδο 1ώρα και 15' λεπτά το σημείο απείχε 8 μίλια. Να βρεθεί η διόπτευση στην δεύτερη θέση του πλοίου καθώς και η ταχύτητα του.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \gamma\eta\mu B = \beta\eta\mu\Gamma \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu B}{\beta} \Rightarrow$$

$\log\eta\mu\Gamma = \log\gamma + \log\eta\mu B - \log\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\eta\mu\Gamma = \log 6,5 + \log\eta\mu 40^0 - \log 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\eta\mu\Gamma = 0,81291 + 9,80807 - 0,90309 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\eta\mu\Gamma = 10,62098 - 0,90309 \Rightarrow \log\eta\mu\Gamma = 9,71789 \Rightarrow$

$$\hat{\Gamma} = 31^0\ 29'$$

Άρα η ζητούμενη διόπτευση θα είναι: $89^0\ 60' - 31^0\ 29' = 58^0\ 31'$.
Άρα η διόπτευση είναι: Β $58^0\ 31'$ Ζ.

β) Υπολογισμός της γωνίας Α

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0,\ \hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \Rightarrow \hat{A} = 180^0 - 71^0 29' = 108^0 31'$$

γ) Υπολογισμός της πλευράς α

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \beta * \eta\mu A * \sigma\tau\epsilon\mu B \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log\alpha = \log\beta + \log\eta\mu A + \log\sigma\tau\epsilon\mu B \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\alpha = \log 8 + \log\eta\mu 108^0\ 31' + \log\sigma\tau\epsilon\mu 40^0 \Rightarrow$

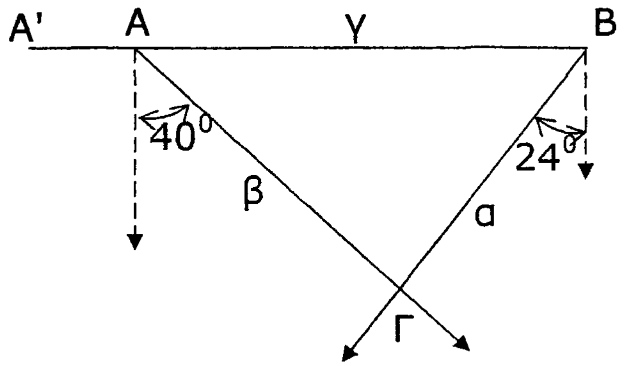
$\Rightarrow \log\alpha = 0,90309 + 9,97691 + 10,19193 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\alpha = 21,07193 \Rightarrow \log\alpha = 1,07193\ (-20)$ $\Rightarrow$ **α= 11,8 ναυτ.μιλ**

Η ταχύτητα είναι: $u = \frac{s}{t} = \frac{11,8}{1,25} = 9,44$ κόμβοι

2. *Έστω Α και Β δύο πλοία. Το Α πλέει προς Απηλιώτην και βλέπει το Β να διασταυρώνει την πορεία του πλέαντος προς Ν 24⁰ Ζ. Δέκα λεπτά αργότερα το Β διοπτεύεται προς Ν 40⁰ Α. να υπολογιστεί η απόσταση των πλοίων κατά την δεύτερη διόπτευση, όταν είναι γνωστό ότι και τα δυο πλοία πλέουν με ταχύτητα 12 κόμβων.*

<u>Λύση:</u>



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ. Έως ότου το πλοίο Α από το Α' μεταβεί στην θέση Α (σχήμα) πέρασαν 10min. Κατά τον ίδιο χρόνο το Β φθάνει στη θέση Γ, άρα (ΒΓ)=α=2 ναυτικά μίλια.

Σε 60' 12 κόμβοι

Σε 10' x=;

$$x = \frac{12 * 10}{60} = 2$$

$$\hat{A} = 90^0 - 40^0 = 50^0$$

$$\hat{B} = 90^0 - 24^0 = 66^0$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0, \hat{\Gamma} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^0 - (50^0 + 66^0) \Rightarrow \hat{\Gamma} = 64^0$$

β) Υπολογισμός της πλευράς β

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A} \Rightarrow \beta = \alpha * \eta\mu B * \frac{1}{\eta\mu A} \Rightarrow \beta = \alpha * \eta\mu B * \sigma\tau\varepsilon\mu A \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ logβ = logα + logημΒ + logστεμΑ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logβ = log2 + logημ66⁰ + logστεμ50⁰ $\Rightarrow$

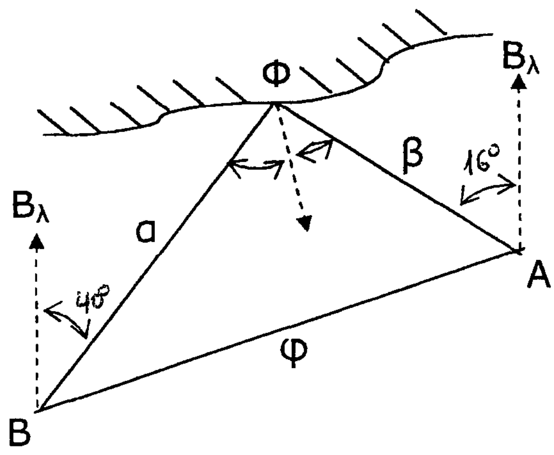
$\Rightarrow$ logβ = 0,30103 + 9,96073 + 10,11575 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logβ = 20,37751 $\Rightarrow$ logβ=0,37751(+20) $\Rightarrow$ <u>β= 2,381ναυτ.μιλ</u>

Άρα η ζητούμενη Απόσταση είναι β=2,381 ναυτ. μιλια

3. *Ένα πλοίο πλέει κατά μήκος της ακτής με ταχύτητα 12 κόμβους και παρατηρεί ένα φάρο προς διόπτευση Β 16^0 Ζ και σε απόσταση 3 μίλια. Μετά πλεύση 40 λεπτών ο φάρος διοπτεύεται προς Β 60^0 Α. Να βρεθεί η πορεία του πλοίου.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Β

$$\frac{\beta}{\varphi} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Phi} \Rightarrow \eta\mu B = \frac{\beta * \eta\mu\Phi}{\varphi} \Rightarrow$$

$$\left[\hat{\Phi} = 60^0 + 16^0 = 76^0\right]$$

logημB= logβ + logημΦ - logφ $\Rightarrow$

logημB= log3 + logημ76^0 - log8 $\Rightarrow$ logημB= 0,47712 + 9,98690 - 0,90309

$\Rightarrow$ logημB= 9,56093 και $\hat{B} = 21^0\ 20',2$

β) Υπολογισμός της γωνίας Α

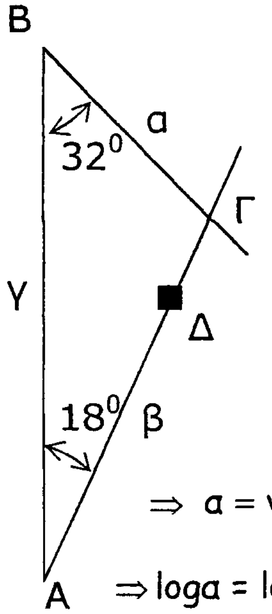
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Phi} = 180^0 \Rightarrow \hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{\Phi}) \Rightarrow \hat{A} = 180^0 - 97^0 20',2 \Rightarrow$$

$\hat{A} = 82^0 39',8$ Οπότε $82^0 39',8 + 16^0 = 98^0 39',8$

Άρα η ΠΟΡΕΙΑ είναι $179^0\ 60'$ -$98^0\ 39',8$= N $81^0\ 20',2$ Z

4. Δυο πλοία βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό. Το Β είναι 10 μίλια βορειότερο από το Α. το Β πλέει προς 148^0 με ταχύτητα 15 κόμβους και το Α προς 018^0 με ταχύτητα 13 κόμβους. Ζητείται η απόσταση των πλοίων όταν ένα από αυτά θα περάσει πρώραθεν του άλλου.

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\hat{\Gamma} = 180^0 - (32^0 + 18^0) = 130^0$$

$$\left(\hat{B} = 180^0 - 148^0 = 32^0\right)$$

β) Υπολογισμός της πλευράς ΒΓ= α

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \alpha = \gamma * \eta\mu A * \frac{1}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ α = γ * ημΑ * στεμΓ $\Rightarrow$ logα = logγ + logημΑ + logστεμΓ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = log10 + logημ18^0 + logστεμ130^0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 1,00000 + 9,48948 + 10,11575 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logα = 20,60523 (-20) $\Rightarrow$ logα= 0,60523 $\Rightarrow$ α= 4,02920

γ) Υπολογισμός της πλευράς ΑΓ = β

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \beta = \gamma\eta\mu B \frac{1}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \beta = \gamma\eta\mu B * \sigma\tau\epsilon\mu\Gamma$$

$\Rightarrow$ logβ = logγ + logημΒ + logστεμΓ $\Rightarrow$logβ = log10 + logημ32^0 + logστεμ50^0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logβ = 1,00000 + 9,72421 +10,11575 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ logβ = 20,83996 (-20) $\Rightarrow$ β= 6,918

Χρόνος μετάβασης του Β στο σημείο Γ, $t = \frac{s}{u} = \frac{4,092}{15} = 0,268h = 16',08$

Όταν το Β βρίσκεται στο Γ, το Α βρίσκεται στο Δ

Άρα το Α σε 60' διανύει 13 μίλια. (16',08 είναι ο χρόνος για να πάει από το Β→Γ)

» » σε 16',08 » x μίλια

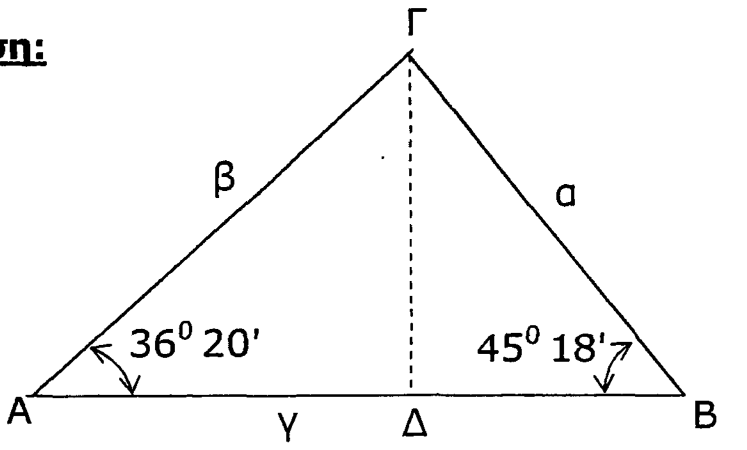
$$x = \frac{13 * 16',08}{60} = 13 * 0,268 = 3,484$$ μίλια. Άρα:

ΓΔ = ΑΓ - ΔΑ = 6,918-3,484=3,434 μίλια

Άρα το Β θα περάσει πιο μπροστά από το Γ κατά 3,434 μίλια.

5. Δύο σταθμοί Α και Β απέχουν 6.οooft και παρατηρούν ένα αερόστατο που βρίσκεται ακριβώς πάνω από την ευθεία την οποία τους ενώνει. Το ύψος του από το Α είναι 36^0 20' και από το Β 45^0 18'. Να βρεθεί το ύψος του αερόστατου σε ft.

Λύση:



Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \beta = \gamma\eta\mu B\frac{1}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \beta = \gamma\eta\mu B * \sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\beta = \log\gamma + \log\eta\mu B + \log\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\beta = \log 6000 + \log\eta\mu(45^0\ 18') + \log\sigma\tau\varepsilon\mu(98^0\ 22') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\beta = 3{,}77815 + 9{,}85175 + 10{,}00465 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\beta = 23{,}63455\ (-20) = 3{,}63455 \Rightarrow \underline{\beta=4310{,}7}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \Rightarrow (\Gamma\Delta) = \beta\eta\mu A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\Gamma\Delta) = \log\beta + \log\eta\mu A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\Gamma\Delta) = \log 4310{,}7 + \log\eta\mu(36^0\ 20') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\Gamma\Delta) = 3{,}63455 + 9{,}77268 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\Gamma\Delta) = 13{,}40723\ (-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\Gamma\Delta) = 3{,}40723 \text{ και } \Gamma\Delta = 2554{,}1 \text{ ft}$$

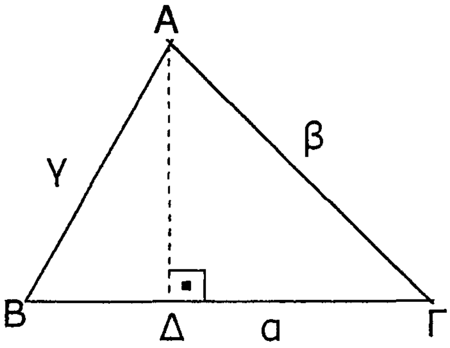
Άρα το ύψος του αερόστατου είναι:

$\underline{(\Gamma\Delta) = 2554{,}1 \text{ ft}}$

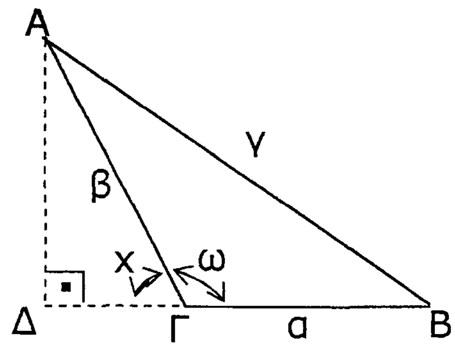
Β) ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$συνΑ = \frac{β^2 + γ^2 - α^2}{2βγ},\ συνΒ = \frac{α^2 + γ^2 - β^2}{2αγ},\ συνΓ = \frac{α^2 + β^2 - γ^2}{2αβ}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε τρίγωνο, εάν $\hat{Γ} < 90^0$, ισχύει η σχέση
$γ^2 = α^2 + β^2 - 2α(ΔΓ)$ (1)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ (σχ.1) έχουμε ότι: ΔΓ= βσυνΓ, οπότε εάν την αντικαταστήσω στην (1) σχέση έχουμε:
$γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$. Αυτός ο τύπος δεν μεταβάλλεται και όταν η $\hat{Γ}$ είναι αμβλεία (σχ.2) διότι:
$γ^2 = α^2 + β^2 - 2α(ΔΓ)$ και επειδή ΔΓ = Βσυνx αλλά συνx=συνω άρα έχουμε $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$. Επιλύω ως προς συνΓ και έχω: $συνΓ = \frac{α^2 + β^2 - γ^2}{2αβ}$. Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για να υπολογίσουμε το συνΒ και το συνΑ.

Από τους τύπους των συνημιτόνων είναι φανερό ότι, όταν γνωρίζουμε τις πλευρές ενός τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

***Ι** Σε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές α, β και γ είναι αντίστοιχα 8, 4 και 5m. Να υπολογιστούν οι γωνίες του.*

Λύση:

α) Υπολογισμός της $\hat{A}$

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{4^2+5^2-8^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{16+25-64}{40}=\frac{41-64}{40}=\frac{-23}{40}$$

$$\sigma\upsilon\nu A=-0,575\Rightarrow\sigma\upsilon\nu A=0,575,\ \hat{A}\simeq125^0 7'$$

β) Υπολογισμός της $\hat{B}$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{8^2+5^2-4^2}{2\cdot8\cdot5}=\frac{64+25-16}{80}=\frac{73}{80}=0,91250$$

$$\sigma\upsilon\nu B=0,91250\Rightarrow\hat{B}=24^0 8',8$$

γ) Υπολογισμός της $\hat{\Gamma}$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=\frac{64+16-25}{2\cdot8\cdot4}=\frac{55}{64}\simeq0,85938,\ \hat{\Gamma}=30^0\ 45'$$

Οι τύποι των συνημιτόνων έχουν το μειονέκτημα ότι δεν μπορούν να υπολογιστούν λογαριθμικά, γι' αυτό δεν τους χρησιμοποιούν οι ναυτιλλόμενοι, οι οποίοι χρησιμοποιούν πάρα πολύ τους ΤΥΠΟΥΣ ΤΟΥ ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΟΥ.

Γ) ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΟΥ

$$ημπρA = \frac{(τ-β)(τ-γ)}{βγ}, \quad ημπρB = \frac{(τ-α)(τ-γ)}{αγ}, \quad ημπρΓ = \frac{(τ-α)(τ-β)}{αβ}$$

Οι παραπάνω τύποι επιλύουν ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται οι πλευρές του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πολλαπλασιάζω με το -1 και προσθέτω το 1 και στα δυο μέλη της σχέσης: $συνA = \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$ (τύπος συνημιτόνων)

$1 - συνA = 1 - \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$. Διαιρώ κατά μέλη με το 2:

$$\frac{1-συνA}{2} = \frac{1 - \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}}{2} \Rightarrow \frac{1-συνA}{2} = \frac{\frac{2βγ-β^2-γ^2+α^2}{2βγ}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow$$

$$ημπρA = \frac{2βγ-β^2-γ^2+α^2}{4βγ} \Rightarrow ημπρA = \frac{α^2-(β^2+γ^2-2βγ)}{4βγ} \Rightarrow$$

$$ημπρA = \frac{α^2-(β-γ)^2}{4βγ} = \frac{(α+β-γ)(α-β+γ)}{4βγ} =$$

$$= \frac{(α+β+γ-2γ)(α=β+γ-2β)}{4βγ} = (\text{καθετοντας } \frac{α+β+γ}{2} = τ)$$

$$= \frac{(2τ-2γ)(2τ-2β)}{4βγ} = \frac{\not{2}(τ-γ)\not{2}(τ-β)}{\not{4}βγ}$$

Άρα $ημπρA = \frac{(τ-β)(τ-γ)}{βγ}$. Ομοίως αποδεικνύονται οι άλλοι δυο τύποι.

1-συνA ονομάζεται παρημίτονο ενώ $\frac{1-συνA}{2}$ ημιπαρημίτονον

α+β+γ=2τ περίμετρος τριγώνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. *Να επιλυθεί ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζουμε τοι οι πλευρές του είναι: α=154m, β=140,6m και γ=110,7m*

Λύση:

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{154+140,6+110,7}{2} = 202,65 \text{ και}$$

(τ-α)= 48,65 (τ-β)=62,05 (τ-γ)=91,95.

α) Υπολογισμός της γωνίας Α

$$\eta\mu\pi\rho A = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

(τ-β)=62,05	log(τ-β)=log62,05=1,79274
(τ-γ)=91,95	log(τ-γ)=log91,95=1,96355
β=140,6	logβ= log140,6=2,14799
γ=91,95	logγ= log91,95=2,04415

$$\log \eta\mu\pi\rho A = \log(\tau-\beta)+\log(\tau-\gamma)-(\log\beta+\log\gamma) \Rightarrow$$

$$\log \eta\mu\pi\rho A = 1,79274+1,96355-4,19214 = 9,56415$$

$$\log \eta\mu\pi\rho A = 9,56415,\ \hat{A} = 74^{0}31'$$

β) Υπολογισμός της γωνίας Β

$$\eta\mu\pi\rho B = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = \log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\gamma)-(\log\alpha+\log\gamma)$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = \log 48,65+\log 91,95-(\log 154+\log 110,7)$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = 1,68708+1,96355-(2,18752+2,04415)$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = 3,65063-4,23167 \Rightarrow$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = 13,65063(-10)-4,23167 \Rightarrow$$

$$\log \eta\mu\pi\rho B = 9,41896 \text{ Άρα } \hat{B} = 61^{0}\ 37',6$$

γ) Υπολογισμός της γωνίας Γ

$$\eta\mu\pi\rho\Gamma = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma = \log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\beta)-[\log\alpha+\log\beta] \Rightarrow$$

$$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma = \log 48,65+\log 62,05-[\log 154+\log 140,6] \Rightarrow$$

$$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma = 1,68708+1,79274-(2,18752+2,14799) \Rightarrow$$

$$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma = 3,47982-4,33551$$

$$\log\eta\mu\pi\rho\Gamma = 9,14431$$

$\hat{\Gamma}=43^0\ 50',9$

Έλεγχος πράξεων:

74^0	$31',3$
61^0	$37',6$
43^0	$50',9$
178^0	$119',8$

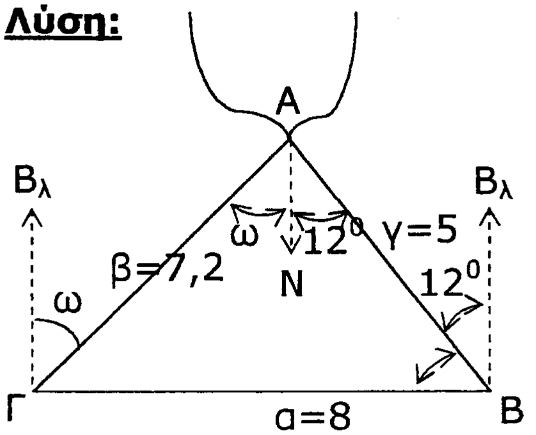
Οι γωνίες πρέπει να υπολογίζονται και οι τρείς διότι έτσι γίνεται και έλεγχος των πράξεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

(ΧΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΜΙΠΑΡΑΗΜΙΤΟΝΟΥ)

1. *Ένας φάρος διοπτεύεται προς Β 12^0 Ζ και από απόσταση 5 μιλ. από ένα πλοίο, το οποίο στη συνέχεια διανύει 8 μίλια προς Δυσμάς, οπάτε ο φάρος απέχει 7,2 μίλια. Να βρεθεί η πορεία που τηρήθεικε από το πλοίο και η δεύτερη διόπτευση. (Το πλοίο Νότια του φάρου).*

Λύση:



Στην εφαρμογή αυτή δίνονται οι πλευρές του τριγώνου και ζητούνται οι γωνίες του.

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{8+7,2+5}{2} = \frac{20,2}{2} = 10,1$$

(τ-α) = 10,1-8= 2,1

(τ-β) = 10,1-7,2= 2,9

(τ-γ) = 10,1-5= 5,1

α) Υπολογισμός της $\hat{B}$

$$ημπρB = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}$$

$$\log ημπρB = \log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\gamma)-(\log\alpha+\log\gamma)$$

$$\log ημπρB = \log 2,1+\log 5,1-(\log 8+\log 5) \Rightarrow$$

$$\log ημπρB = 0,32222+0,70757-(0,90309+0,69897) \Rightarrow$$

$$\log ημπρB = 1,02979(+10)-1,60206 = 9,42773,\ \hat{B} = 62^0\ 19',3.$$

Άρα η ΠΟΡΕΙΑ (Z_λ) = 62^0 19',3+12^0 Άρα <u>ΠΟΡΕΙΑ =Β 74^0 19',3 Ζ</u>

β) Υπολογισμός της $\hat{A}$

$$ημπρA = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

(τ-β)=2,9

(τ-γ)=5,1

β=7,2

γ=5

$$\log ημπρA = \log(\tau-\beta)+\log(\tau-\gamma)-(\log\beta+\log\gamma) \Rightarrow$$

$$\log ημπρA = \log 2,9+\log 5,1-(\log 7,2+\log 5) \Rightarrow$$

$$\log ημπρA = 0,46240+0,70757-(0,85733+0,69897) \Rightarrow$$

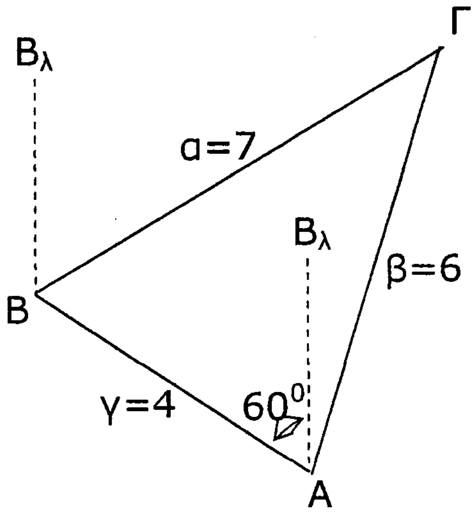
$$\log ημπρA = 1,16997(+10)-1,55630 = 9,61367 \text{ και } \hat{A} = 79^0 43',7$$

ω' = 79^0 43',7 - 12^0 = 67^0 43',7. Αλλά ω=ω'(εντός εναλλάξ)

Άρα η δεύτερη διόπτευση είναι ω= Β 67^0 43',7 Α

2. *Ένας φάρος Α διοπτεύεται προς Β 60^0 Ζ και σε απόσταση 4 μίλια από ένα δεύτερο φάρο Β. Από πλοίο που πλέει προς Απηλιώτην, υπολογίζεται με την βοήθεια του εξάντα ότι απέχει 6 μίλια από τον Α φάρο και 7 μίλια από τον Β. Να υπολογιστεί η διόπτευση του πλοίου από τον φάρο Β.*

Λύση:



α) Υπολογισμός της γωνίας Β

2τ=α+β+γ ⇒ 2τ=7+6+4 ⇒ 2τ=17 ⇒

τ=8,5

(τ-α)=8,5-7=1,5

(τ-γ)=8,5-4=4,5

$$\text{ημπρ}B = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}$$

$$\log \text{ημπρ}B = \log\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma} \Rightarrow$$

$$\log \text{ημπρ}B = \log(\tau-\alpha)+\log(\tau-\gamma)-(\log\alpha+\log\gamma) \Rightarrow$$

$$\log \text{ημπρ}B = \log 1,5+\log 4,5-(\log 7+\log 4) \Rightarrow$$

$$\log \text{ημπρ}B = 0,17609+0,65321-(0,60206+0,84510) \Rightarrow$$

$$\log \text{ημπρ}B = 0,82930(+10)-1,44716 \Rightarrow$$

$\log \text{ημπρ}B = 9,38214$ Άρα $\hat{B}$=58^0 48',7

Οπότε 180^0 -(58^0 48',7+60^0)= 61^0 11',3

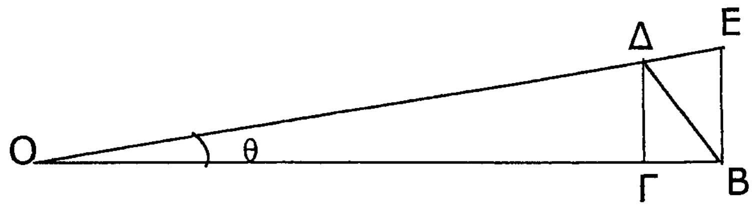
Άρα η διόπτευση είναι Β 61^0 11',3 Α.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΜΙΚΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ (ημΘ=Θ=εφΘ)

ΜΙΚΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ:

Όταν έχουμε μικρές γωνίες δηλαδή από 0^0 - 6^0 το ημίτονο, η εφαπτομένη και το τόξο (σε ακτίνια) έχουν περίπου το ίδιο μήκος. Δηλαδή $\hat{\Theta} = εφΘ = ημΘ$



$\hat{θ} = \frac{ΒΔ}{ΟΒ}$(ακτινια), $εφθ = \frac{ΒΕ}{ΟΒ}$, $ημθ = \frac{ΓΔ}{ΟΒ}$

- Για να ισχύουν οι παραπάνω λόγοι πρέπει να έχουμε: ΒΔ=ΒΕ=ΓΔ, οπότε

$\frac{ΒΔ}{ΟΒ} = \frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{ΓΔ}{ΟΒ}$ άρα $\Rightarrow$ $\hat{θ} = εφθ = ημθ$.

ΑΚΤΙΝΙΟ ονομάζεται το τόξο εκείνο, του οποίου το μήκος ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΚΤΙΝΙΩΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ $\frac{2\pi \not{R}}{\not{R}} = 2\pi = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28 rad$

Σε τόξο ενός ακτινίου πόσες μοίρες αντιστοιχούν;

360^0 6,28 rad

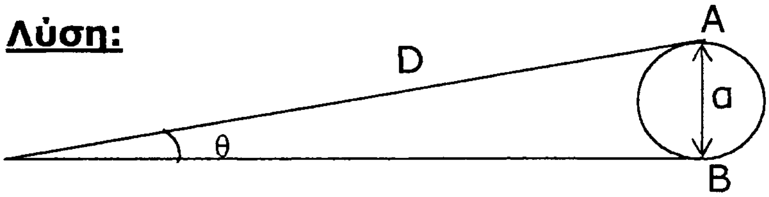
x=; 1 rad

$x = \frac{360^0 \cdot 1}{6{,}28} = 57^0{,}3$ κατά προσέγγιση ή 3438'

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον

Η οριζόντια γωνία μεταξύ των δυο άκρων ενός μικρού νησιού διαμέτρου 1,1 μίλ. είναι 5^0 30'. Να υπολογίσετε την απόσταση από τη γωνία αυτή.

Λύση:



$\hat{θ} = 5^0 30'$ ή σε rad $= \frac{5^0{,}5}{57^0{,}3}$ ή σε πρώτα $\frac{330}{3438}$, α=1,1 μιλ (mile).

$ημθ = \hat{θ} = \frac{AB}{D} \Rightarrow D = \frac{AB}{θ} = 1{,}1 \times \frac{3438}{330} = 11{,}46$ μιλ.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

- ***Άλγεβρα και Ασκήσεις***, ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Ε. ΚΟΝΤΟΥ, Εκδόσεις ΜΙΧ. Α. ΠΕΤΡΗ , Αθήνα 1971

- ***Ασκήσεις ανώτερων μαθηματικών*** , Τόμος Α', ΜΙΧΑΛΗ ΑΝΤ. ΓΛΑΜΠΕΔΑΚΗ, Εκδόσεις "ΙΩΝ"

- ***Επίπεδη Ναυτική Τριγωνομετρία***, ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΑΓΓΕΛΑΤΟΥ, Εκδόσεις Ναυτικών και Τεχνικών Βιβλίων Εμμανουήλ Ν. Σταυριδάκη

- ***Ανώτερα μαθηματικά***, Δ.Ι. ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΥ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Κβ', Θεσ/νίκη 1978

- ***Μαθηματικά***, Άλγεβρα, ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ, ΟΕΔΒ, Αθήνα 1977

- ***Μαθηματικά***, Τριγωνομετρία, ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ, ΟΕΔΒ, Αθήνα 1977

- ***Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία***, ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ, Εκδοτικός Οίκος "ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ Ο.Ε", Αθήνα 1950

- ***Μαθήματα Τριγωνομετρίας***, ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, , Αθήνα 1963

- ***Μαθηματικά***, Άλγεβρα, Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ - Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ - Χ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ - Α. ΜΠΕΤΣΗΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Σ. ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ, ΟΕΔΒ, Αθήνα 1989